北京大学教材

泛函分析讲义

上册

张恭庆　林源渠　编著

北京大学出版社

北京大学教材

泛函分析讲义

（上册）

张恭庆　林源渠　编著

北京大学出版社

泛函分析讲义(上册)
张恭庆　林源渠　编著
责任编辑　徐信之
*
北京大学出版社出版
(北京大学校内)
北京大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
850×1168毫米　32开本　8.375印张　200千字
1987年3月第一版　1987年3月第一次印刷
印数：00001—13,000册
统一书号：13209·174　定价：1.70元

内 容 简 介

这是一本泛函分析教材。它系统地介绍线性泛函分析的基础知识。全书共分四章：度量空间，线性算子与线性泛函，广义函数与Соболев空间，以及紧算子与Fredholm算子。本书的主要特点是它侧重于分析若干基本概念和重要理论的来源和背景，强调培养读者运用泛函方法解决问题的能力，注意介绍泛函分析理论与数学其它分支的联系。书中包含丰富的例子与应用，对于掌握基础理论有很大帮助。

此书适用于理工科大学本科生与研究生阅读，并且可供一般的数学工作者、物理工作者、工程技术人员参考。

序

八十年代以来，许多高等院校都开设了泛函分析课程，而数学系的学生大都把泛函分析当作一门基础课来学。这种趋势反映了近几十年来数学的发展：泛函分析在分析学中已占据了重要的位置。

泛函分析是一门较新的数学分支。在它的发展中受到了数学物理方程和量子力学的推动，后来又整理、概括了经典分析和函数论的许多成果。由于它把具体的分析问题抽象到一种更加纯粹的代数、拓扑结构的形式中进行研究，因此逐步形成了种种综合运用代数、几何（包括拓扑）手段处理分析问题的新方法。正因为这种纯粹形式的代数、拓扑结构是根植于肥沃的经典分析和数学物理土壤之中的，所以，由此发展起来的基本概念、定理和方法也就显得更为广泛、更为深刻。现在，泛函分析已经成为一门内容丰富、方法系统、体系完整、应用广泛的独立分支。对于任何一个从事纯粹数学与应用数学研究的学者来说，它都是一门不可缺少的知识。

国内现已出版不少泛函分析教材。但其中有的或偏于专门，或过于简略，其共同缺陷是把这门联系广泛、丰富多彩的课程与经典分析及数学物理隔绝了起来。读者学完以后，有时只能欣赏其体系之抽象、论证之精巧，却难以体会到泛函方法的实质及威力。

本书是试图弥补这一缺陷而编写的一本教材。它力图向读者展示泛函分析中若干重要概念、理论的来源与背景；力图向读者介绍如何透过分析问题的具体内容洞察其内在的代数、几何实质；力图向读者表明泛函分析理论与数学的其它分支有着密切的联系，并有广泛的应用。

实现以上目的所作的变动是深入而细致的。我们只能通过几个典型例子，来说明本书的一些特点。

为了使读者对于紧算子谱（Riesz-Schauder）理论的来龙去脉有一个比较全面的了解，我们是从线代数方程组可解性的讨论开始的。对比积分方程，我们逐条把 Fredholm 结论"翻译"成相应的线性子空间的几何关系，又通过分析有穷维问题与无穷维问题之间在算子值域与谱集方面的异同，给出紧算子谱定理的证明。然后直接把这一理论应用到椭圆型边值问题可解性及本征值问题的讨论中去。此外，鉴于指标理论在现代数学发展中的重要性，我们以奇异积分算子为例，引出 Fredholm 算子，并导出相应的指标公式。

Hahn-Banach 定理是泛函分析中一个十分重要的基本定理。它的重要性不仅表现在其对建立 Banach 空间理论体系所起的作用上，而且还表现在解决许多具体的分析问题之中。然而 Hahn-Banach 定理的这些巧妙的应用，并不是读者在学了它的定理陈述与证明之后就能一目了然的。事实上，往往需要把原始分析问题的陈述转化成几何形式。只有从几何形式中把问题化归为凸集分离或足够多泛函的存在之后，应用 Hahn-Banach 定理才是可能的。我们在教材中选择 Runge 逼近定理以及凸规划存在性定理等作为例子，逐步引导读者去考察这种转化，体会泛函方法解决经典问题的威力。

为了介绍泛函分析的应用，往往需要涉及其它数学分支的知识。许多泛函教材，因受制于体系的自我封闭，致使应用部分不能充分展开。然而，学科的相互渗透乃是当今数学发展的一个主要趋势。因此，在教学中似乎不必过于拘谨。在本书中，我们对于 Brouwer 不动点定理、单位分解定理等几个很容易从其它课程中学到的定理，不证明地加以引用，并给出参考文献。去掉上述约束之后，介绍泛函分析应用的天地就广阔多了。于是在本书中，我们把泛函分析的几个基本定理应用到常、偏微分方程理

论、实函数论、函数逼近论、数值分析、数学规划理论、变分不等方程等好几个数学分支中去；本书还有下册，在那里我们还将更深入地介绍泛函分析与其他数学分支，特别是与数学物理的联系。

本书是为本科生初学泛函而写的；而其下册可供研究生作为基础课教本。根据我们的经验，按每周3学时，每册基本内容可于一学期内讲授完毕。书中的应用与例子较多，教师可选讲其中一部分，其余部分则供有兴趣的读者参考。书中每节配有一定数量的习题，其中有些是某些定理的证明细节，有些是学过定理证法的模仿，还有一些本身就是有趣的结论或有用的反例。读者可根据自己的情况选作练习。

编者虽抱有弥补前述缺陷之目的，但因学识所限，加之初次尝试，谬误、片面之处一定不少。又因为体系变动较大，前后脱节、甚至证明疏漏之处在所难免。热诚欢迎读者批评指正。本书曾在北京大学试讲过若干次，北京大学数学系的许多师生曾提出过宝贵意见，兹不一一列举，在此一并致谢。

张恭庆　谨识

一九八六年夏于中关园

目　录

第一章 度量空间

§1 压缩映象原理

度量空间又称距离空间(metric space)，它是一种拓扑空间，其上的拓扑由指定的一个距离决定。

定义1.1.1 设$\mathscr{X}$是一个非空集。$\mathscr{X}$叫做距离空间，是指在$\mathscr{X}$上定义了一个双变量的实值函数$\rho(x,y)$，满足下列三个条件：

(1) $\rho(x,y)\geqslant 0$，而且$\rho(x,y)=0$，当且仅当$x=y$；

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

(3) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$ $(\forall x,y,z\in\mathscr{X})$。

这里ρ叫做$\mathscr{X}$上的一个距离；以ρ为距离的距离空间$\mathscr{X}$记做$(\mathscr{X},\rho)$。

注 距离概念是欧氏空间中两点间距离的抽象。事实上，如果对$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$，令

$$\rho(x,y)=\left[(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (1.1.1)$$

容易看到(1)，(2)，(3)都满足。以后当说到欧氏空间时，我们始终用这个ρ规定其上的距离。

例1.1.2(空间$C[a,b]$) 区间$[a,b]$上的连续函数全体记为$C[a,b]$，按距离

$$\rho(x,y)\triangleq\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)| \qquad (1.1.2)$$

形成距离空间$(C[a,b],\rho)$，以后简记作$C[a,b]$。以后当说到连续函数空间$C[a,b]$时，我们始终用(1.1.2)规定的ρ作为其上的距离，除非另外说明。

引进距离的目的是刻划“收敛”。

定义1.1.3 距离空间$(\mathscr{X},\rho)$上的点列$\{x_n\}$叫做收敛到x_0的是指：$\rho(x_n,x_0)\to 0(n\to\infty)$。这时记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$。或简单地记作$x_n\to x_0$。

注 在$C[a,b]$中点列$\{x_n\}$收敛到x_0是指：$\{x_n(t)\}$一致收敛到$x_0(t)$。

与实数集合一样，对于一般的度量空间可引进闭集和完备性等概念。

定义1.1.4 度量空间$(\mathscr{X},\rho)$中的一个子集E称为闭集，是指：$\forall\{x_n\}\subset E$，若$x_n\to x_0$，则$x_0\in E$。

定义1.1.5 距离空间$(\mathscr{X},\rho)$上的点列$\{x_n\}$叫做基本列，是指：$\rho(x_n,x_m)\to 0(n,m\to\infty)$。这也就是说：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)$，使得$m,n\geqslant N(\varepsilon)\Rightarrow\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$。如果空间中所有基本列都是收敛列，那末就称该空间是完备的。

例1.1.6 $(\mathbb{R}^n,\rho)$是完备的，其中ρ按(1.1.1)式定义。

例1.1.7 $(C[a,b],\rho)$是完备的。

证 设$\{x_n\}$是$(C[a,b],\rho)$中的一串基本列，那末$\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)$，使得对$\forall m,n\geqslant N(\varepsilon)$有

$$\rho(x_m,x_n)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon.$$

因此，对$\forall t\in[a,b]$，

$$|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon\qquad(\forall m,n\geqslant N(\varepsilon)).\qquad(1.1.3)$$

固定$t\in[a,b]$，我们看到数列$\{x_n(t)\}$是基本的，从而极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)$存在。让我们用$x_0(t)$表示此极限，在(1.1.3)中令$m\to\infty$得到$|x_0(t)-x_n(t)|\leqslant\varepsilon(\forall n\geqslant N(\varepsilon))$。由此可见$x_n(t)$一致收敛到$x_0(t)$，从而$x_0(t)$连续并在$C[a,b]$中$x_n$收敛到$x_0$。∎

给定距离空间$(\mathscr{X},\rho)$，$(\mathscr{Y},r)$，考察映射$T:\mathscr{X}\mapsto\mathscr{Y}$。

定义1.1.8 设$T:(\mathscr{X},\rho)\to(\mathscr{Y},r)$是一个映射，称它是连

续的，如果对于$\mathscr{X}$中的任意点列$\{x_n\}$和点x_0，

$$\rho(x_n,x_0)\to 0\Rightarrow r(Tx_n,Tx_0)\to 0 \qquad (n\to\infty).$$

命题1.1.9 为了$T:(\mathscr{X},\rho)\to(\mathscr{Y},r)$是连续的，必须且只须$\forall\varepsilon>0$，$\forall x_0\in\mathscr{X}$，$\exists\delta=\delta(x_0,\varepsilon)>0$，使得

$$\rho(x,x_0)<\delta\Rightarrow r(Tx,Tx_0)<\varepsilon \qquad (\forall x\in\mathscr{X}). \quad (1.1.4)$$

证 必要性。若(1.1.4)不成立，必$\exists x_0\in\mathscr{X}$，$\exists\varepsilon>0$，使得$\forall n\in\mathbf{N}$，$\exists x_n$使得$\rho(x_n,x_0)<1/n$，但$r(Tx_n,Tx_0)\geqslant\varepsilon$，即得$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=0$，但$\lim\limits_{n\to\infty}r(Tx_n,Tx_0)\neq 0$，矛盾。

充分性。设(1.1.4)成立，且$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=0$，那末$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=N(\delta(x_0,\varepsilon))$，使得当$n>N$时，$\rho(x_n,x_0)<\delta$。从而$r(Tx_n,Tx_0)<\varepsilon$，即得$\lim\limits_{n\to\infty}r(Tx_n,Tx_0)=0$。▌

设φ是$\mathbf{R}^1$上定义的实函数，求方程

$$\varphi(x)=0$$

的根的问题可以看成$\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$的映射

$$f(x)=x-\varphi(x)$$

的不动点问题。即求$x\in\mathbb{R}^1$满足：

$$f(x)=x.$$

下列常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=F(t,x),\\ x(o)=\xi\end{cases} \qquad (1.1.5)$$

或它的等价形式，即求连续函数$x(t)$满足下列积分方程的问题：

$$x(t)=\xi+\int_0^t F(\tau,x(\tau))d\tau\ , \qquad (1.1.6)$$

也可以看成是一个不动点问题。为此，在以$t=0$为中心的某区间$[-h,h]$上考察距离空间$C[-h,h]$，并引入映射

$$(Tx)(t)=\xi+\int_0^t F(\tau,x(\tau))d\tau, \qquad (1.1.7)$$

则(1.1.6)等价于求 $C[-h,h]$ 上的一个点 x，使得 $x=Tx$，即求 T 的不动点。

在距离空间上有一个很简单而基本的不动点定理——压缩映射原理。

定义1.1.10 称 $T:(\mathscr{X},\rho)\to(\mathscr{X},\rho)$ 是一个压缩映射，如果存在 $0<\alpha<1$，使得 $\rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,y)\ (\forall x,y\in\mathscr{X})$。

例 设 $\mathscr{X}=[0,1]$，$T(x)$ 是 $[0,1]$ 上的一个可微函数，满足条件：

$$T(x)\in[0,1] \qquad (\forall x\in[0,1]), \qquad (1.1.8)$$

以及

$$|T'(x)|\leqslant\alpha<1 \qquad (\forall x\in[0,1]), \qquad (1.1.9)$$

则映射 $T:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 是一个压缩映射。

证
$$\begin{aligned}\rho(Tx,Ty)&=|T(x)-T(y)|\\&=|T'(\theta x+(1-\theta)y)(x-y)|\\&\leqslant\alpha|x-y|=\alpha\rho(x,y) \qquad (\forall x,y\in\mathscr{X},0<\theta<1).\end{aligned}$$ ▌

启发 设 $T:[0,1]\to[0,1]$ 可微且满足(1.1.8)及(1.1.9)，问 T 是否存在不动点？若存在有多少个？

直观与算法 $\forall x_0\in[0,1]$，作迭代序列 $x_{n+1}=Tx_n\ (n=0,1,2,\cdots)$，参看图 1.1.1. 因为

$$|x_{n+1}-x_n|=|Tx_n-Tx_{n-1}|\leqslant\alpha|x_n-x_{n-1}|\leqslant\cdots\leqslant\alpha^n|x_1-x_0|,$$

从而对 $\forall P\in\mathbf{N}$，

$$|x_{n+P}-x_n|\leqslant\sum_{i=1}^{P}|x_{n+i}-x_{n+i-1}|\leqslant\sum_{i=1}^{P}\alpha^{n+i-1}|x_1-x_0|$$

$$<\sum_{i=1}^{\infty}\alpha^{n+i-1}|x_1-x_0|=\frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1-x_0|\to 0$$

（当 $n\to\infty$，对 $\forall P\in\mathbf{N}$ 一致）。因此，$\{x_n\}$ 是一个基本列从而有极限。从 $x_{n+1}=Tx_n$，两边取极限（因 T 连续）得

$$x^* = Tx^*.$$

即 x^* 为一不动点。这不动点还是唯一的。事实上，若 x^*, x^{**} 都是不动点，则

$$|x^* - x^{**}| = |Tx^* - Tx^{**}| \leqslant \alpha |x^* - x^{**}|.$$

由此推出

$$x^* = x^{**}.$$

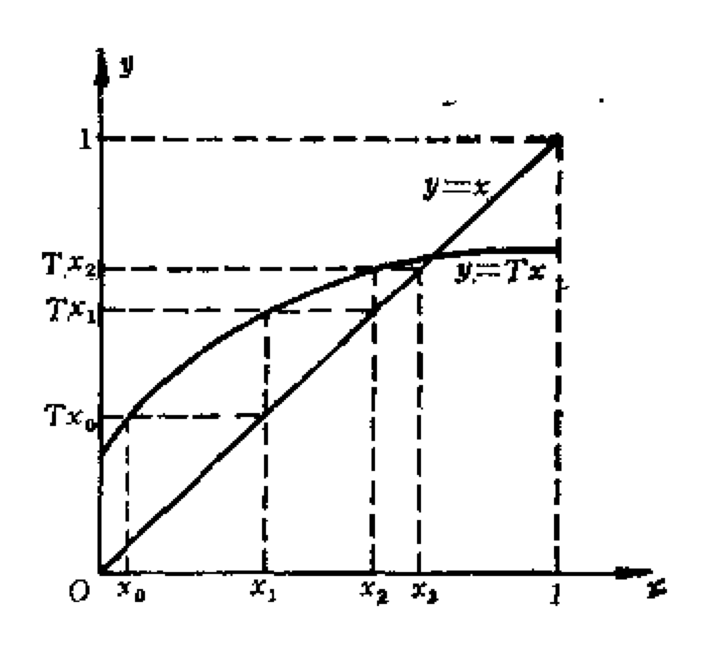


图 1.1.1

抽去上述过程中实数与绝对值的具体内容，不难把这个结论推广到一般的距离空间上去。若 $T:(\mathscr{X},\rho)\to(\mathscr{X},\rho)$ 是一个压缩映射，则仿照上述过程，任取初始点 $x_0\in\mathscr{X}$。考察迭代产生的序列

$$x_{n+1} = Tx_n \qquad (n = 0,1,2,\cdots).$$

和前面一样，我们有

$$\rho(x_{n+1},x_n) = \rho(Tx_n,Tx_{n-1}) \leqslant \alpha\rho(x_n,x_{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant \alpha^n\rho(x_1,x_0).$$

从而对 $\forall P\in\mathbf{N}$，

$$\rho(x_{n+P},x_n) \leqslant \sum_{i=1}^{P}\rho(x_{n+i},x_{n+i-1}) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0)\to 0$$

（当 $n\to\infty$，对 $\forall P\in\mathbf{N}$ 一致）。由此可见 $\{x_n\}$ 是一个基本列。为了它有极限，还要假定 $(\mathscr{X},\rho)$ 是完备的。于是我们得到

定理1.1.11（Banach 不动点定理——压缩映象原理） 设 $(\mathscr{X},\rho)$ 是一个完备的距离空间，T 是 $(\mathscr{X},\rho)$ 到其自身的一个压缩映射，则 T 在 $\mathscr{X}$ 上存在唯一的不动点。

这个原理非常基本，它是泛函分析中的一个最常用、最简单的存在性定理。数学分析中的许多存在性定理是它的特殊情形。

例1.1.12 常微分方程的初值问题 (1.1.5) 的局部存在唯一性。

我们已经把这个问题化归为一个求不动点的问题了。先在 $C[-h,h]$ 上考察由 (1.1.7) 定义的映射 T，我们考察在 $F(t,x)$ 上添加什么条件可以使 T 成为一个压缩映射。注意到

$$\rho(Tx,Ty)=\max_{|t|\leqslant h}\left|\int_0^t F(\tau,x(\tau))d\tau-\int_0^t F(\tau,y(\tau))d\tau\right|$$
$$\leqslant h\max_{|t|\leqslant h}|F(t,x(t))-F(t,y(t))|,$$

因此，比如说只要假设二元函数 $F(t,x)$ 对变元 x 关于 t 一致地满足局部 Lipschitz 条件：$\exists\,\delta>0$，$L>0$，使得当 $|t|\leqslant h$，$|x_1-\xi|\leqslant\delta$，$|x_2-\xi|\leqslant\delta$ 时有

$$|F(t,x_1)-F(t,x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|, \qquad (1.1.10)$$

这时就有 $\rho(Tx,Ty)\leqslant Lh\rho(x,y) \quad (\forall\, x,y\in \overline{B}(\xi,\delta))$，

其中 $\overline{B}(\xi,\delta)\triangleq\{x(t)\in C[-h,h]\,|\max\limits_{|t|\leqslant h}|x(t)-\xi|\leqslant\delta\}$.

在这里我们不能直接取 $C[-h,h]$ 为定理 1.1.10 中的距离空间 $\mathscr{X}$，因为当 $Lh<1$ 时，T 只是在 $C[-h,h]$ 的子集 $\overline{B}(\xi,\delta)$ 上才是压缩的。在这里我们把常数 ξ 看成是 $[-h,h]$ 上恒等于 ξ 的常值函数。

我们取 $\mathscr{X}=\overline{B}(\xi,\delta)$，为了要使 $T:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$，再设

$M\triangleq\max\{|F(t,x)|\,|(t,x)\in[-h,h]\times[\xi-\delta,\xi+\delta]\}$，

取 $h>0$ 足够小，以使

$$\max|(Tx)(t)-\xi|=\max\left|\int_0^t F(t,x(\tau))d\tau\right|\leqslant Mh\leqslant\delta.$$

由于 $(C[-h,h],\rho)$ 是一个完备的距离空间，而 $\mathscr{X}$ 又是它的一个闭子集，因此 $(\mathscr{X},\rho)$ 还是一个完备的距离空间(习题1.1.1)。于是我们得到了

定理1.1.13 设函数 $F(t,x)$ 在 $[-h,h]\times[\xi-\delta,\xi+\delta]$ 上定

义并满足条件(1.1.10)，则当$h<\min\{\delta/M,1/L\}$时，初值问题(1.1.5)在$[-h,h]$上存在唯一解。

例1.1.14(隐函数存在定理) 设$f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$，$U\times V\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$是$(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$的一个邻域。设$f$在$U\times V$内连续并且$\forall x\in U$，关于$y\in V$连续可微。又设

$$f(x_0,y_0)=0;\qquad \left[\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right](x_0,y_0)\neq 0,$$

则$\exists x_0$的一个邻域$U_0\subset U$以及唯一的连续函数$\varphi:U_0\to\mathbb{R}^m$，满足

$$\begin{cases}f(x,\varphi(x))=0 & (\text{当}x\in U_0),\\ \varphi(x_0)=y_0.\end{cases}$$

证 考察映射$T:\varphi\mapsto T\varphi$，

$$(T\varphi)(x)\triangleq\varphi(x)-\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^{-1}f(x,\varphi(x)),$$

其中$\varphi\in C(\bar{B}(x_0,r),\mathbb{R}^m)$，这里$r>0$，$C(\bar{B}(x_0,r),\mathbb{R}^m)$表示定义在闭球$\bar{B}(x_0,r)$上取值在$\mathbb{R}^m$上的向量值连续函数空间，其距离规定为

$$\rho(\varphi,\psi)\triangleq\max_{\substack{x\in\bar{B}(x_0,r)\\ 1\le i\le m}}|\varphi_i(x)-\psi_i(x)|,$$

其中$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)$；$\psi=(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m)$。对$x\in\mathbb{R}^n$与$y_i\in\mathbb{R}^m(i=1,2,\cdots,m)$，记

$$D_yf(x,y_1,\cdots,y_m)\triangleq\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}(x,y_1) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m}(x,y_1)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1}(x,y_m) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m}(x,y_m)\end{pmatrix}.$$

因为假设$\partial f/\partial y$在$U\times V$上连续，所以$\exists\delta>0$，使得

$$\left|\delta_{ij}-\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^{-1}D_yf(x,y_1,\cdots,y_m)\right]_{ij}\right|<\frac{1}{2m}$$

$(i,j=1,2,\cdots,m,\ x\in\bar{B}(x_0,\delta),\ \ y_1,\cdots,y_m\in\bar{B}(y_0,\delta))$，其中 $[\quad]_{ij}$ 表示括号内的矩阵的第 i 行、第 j 列元素，而

$$\delta_{ij}\triangleq\begin{cases}1 & (i=j),\\ 0 & (i\neq j).\end{cases}$$

记 $d_i(x)\triangleq\varphi_i(x)-\psi_i(x)(i=1,2,\cdots,m)$。根据微分中值定理

$$\rho(T\varphi,T\psi)=\max_{\substack{x\in\bar{B}(x_0,r)\\1\leqslant i\leqslant m}}\Bigg|d_i(x)$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^{-1}D_yf(x,\hat{y}_1,\cdots,\hat{y}_m)\right]_{ij}d_j(x)\Bigg|$$

$$<\frac{1}{2}\max_{\substack{x\in\bar{B}(x_0,r)\\1\leqslant i\leqslant m}}|d_i(x)|=\frac{1}{2}\rho(\varphi,\psi),\qquad(1.1.11)$$

其中 $r<\delta$，使得 $\varphi(x)$，$\psi(x)\in B(y_0,\delta)(\forall x\in\bar{B}(x_0,r)),0<\theta_i=\theta_i(x)<1$，$\hat{y}_i(x)=\theta_i\varphi(x)+(1-\theta_i)\psi(x)(i=1,2,\cdots,m)$。今取

$$\mathscr{X}\triangleq\{\varphi\in C(\bar{B}(x_0,r),\mathbb{R}^m)\,|\,\varphi(x_0)=y_0,\varphi(x)\in\bar{B}(y_0,\delta)\},$$

则 $\mathscr{X}$ 在 $C(\bar{B}(x_0,r),\mathbb{R}^m)$ 中是闭的，从而是一个完备的度量空间。(1.1.11)表明 T 是 $\mathscr{X}$ 上的压缩映射。剩下来只要再证 $T:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 就够了。因为根据压缩映象原理，T 存在唯一的不动点，这就是我们所要证的。注意到

$$\rho(T\varphi,y_0)\leqslant\rho(T\varphi,Ty_0)+\rho(Ty_0,y_0)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\rho(\varphi,y_0)+\max_{\substack{x\in\bar{B}(x_0,r)\\1\leqslant i\leqslant m}}\left|\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^{-1}f(x,y_0)\right]_i\right|,$$

又由 f 的连续性，

$$\max_{\substack{x\in\bar{B}(x_0,r)\\1\leqslant i\leqslant m}}\left|\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^{-1}f(x,y_0)\right]_i\right|$$

$$= \max_{\substack{x \in \overline{B}(x_0, r) \\ 1 \leqslant i \leqslant m}} \left| \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} (f(x, y_0) - f(x_0, y_0)) \right]_i \right|$$

$$< \frac{\delta}{2} \qquad (\text{当 } r < \eta \text{ 足够小}).$$

因此，当 $0 < r < \min(\eta, \delta)$时，$\rho(T\varphi, y_0) < \delta$。此外还有

$$(T\varphi)(x_0) = y_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} f(x_0, \varphi(x_0)) = y_0,$$

所以$T: \mathscr{X} \to \mathscr{X}$。

习　题

1.1.1　证明完备空间的闭子集是一个完备的子空间，而任一度量空间中的完备子空间必是闭子集。

1.1.2　(Newton 法)设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的二次连续可微的实值函数，$\hat{x} \in (a,b)$使得 $f(\hat{x}) = 0$，$f'(\hat{x}) \neq 0$。求证存在 $\hat{x}$ 的邻域 $U(\hat{x})$，使得 $\forall x_0 \in U(\hat{x})$，迭代序列

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

是收敛的，并且

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \hat{x}.$$

1.1.3　设$(\mathscr{X}, \rho)$是度量空间，映射 $T: \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ 满足 $\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y)(\forall x \neq y)$，并已知 T 有不动点，求证此不动点是唯一的。

1.1.4　设 T 是度量空间上的压缩映射，求证 T 是连续的。

1.1.5　设 T 是压缩映射，求证 $T^n(n \in \mathbb{N})$ 也是压缩映射，并说明逆命题不一定成立。

1.1.6　设 M 是$(\mathbb{R}^n, \rho)$中的有界闭集，映射 $T: M \to M$ 满足：$\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y)(\forall x, y \in M, x \neq y)$。求证 T 在 M 中存

在唯一的不动点。

1.1.7 对于积分方程

$$x(t)-\lambda\int_0^1 e^{t-s}x(s)ds=y(t),$$

其中 $y(t)\in C[0,1]$ 为一给定函数，λ为常数，$|\lambda|<1$，求证存在唯一解 $x(t)\in C[0,1]$。

§2 完 备 化

在压缩映象原理中，对空间$(\mathscr{X},\rho)$的完备性要求，一般来说是不能省略的。这很容易从下例中看出。大家知道：函数 $T(x)\triangleq\frac{1}{2}\sqrt{x+1}$ 在$[0,1]$上有定义，并且有唯一的不动点 $x_0=(\sqrt{17}+1)/8$。然而若取 $\mathscr{X}=[0,1]\backslash\{x_0\}$，那末$T$仍然是 $\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 的压缩映射，但它却不再有不动点。因此在许多分析问题中，我们经常要求所在的空间$\mathscr{X}$是完备的。不过，空间之完备与否与其上的距离紧密相联。以 $C[a,b]$ 为例，当赋以另一距离：

$$\rho_1(x,y)\triangleq\int_a^b|x(t)-y(t)|dt \tag{1.2.1}$$

时，$(C[a,b],\rho_1)$就不是完备的！（请读者自己验证。）以下我们将仿照实数理论中，从有理数域出发定义无理数的方法，对空间$(\mathscr{X},\rho)$增添“理想元素”，使之“扩充”为一个完备空间。

定义1.2.1 设$(\mathscr{X},\rho)$，$(\mathscr{X}_1,\rho_1)$是两个度量空间，如果存在映射 $\varphi:\mathscr{X}\to\mathscr{X}_1$ 满足

(1) φ是满射；

(2) $\rho(x,y)=\rho_1(\varphi x,\varphi y)\quad(\forall\, x,y\in\mathscr{X})$，

则称$(\mathscr{X},\rho)$和$(\mathscr{X}_1,\rho_1)$是等距同构的，并称φ为等距同构映射，有时简称等距同构。

注 由(2)导出φ还是单射。

显然，凡是等距同构的度量空间，它们的一切与距离相联系的性质都是一样的。因此今后我们将不再区分它们。如果度量空

间$(\mathscr{X}_1,\rho_1)$与另一个度量空间$(\mathscr{X}_2,\rho_2)$的子空间$(\mathscr{X}_0,\rho_2)$是等距同构的，我们就说$(\mathscr{X}_1,\rho_1)$可以嵌入$(\mathscr{X}_2,\rho_2)$。在上述意义下，我们认为$(\mathscr{X}_1,\rho_1)$就是$(\mathscr{X}_2,\rho_2)$的一个子空间，并简单地记作$(\mathscr{X}_1,\rho_1)\subset(\mathscr{X}_2,\rho_2)$。

在实数集合里，我们知道什么叫稠密子集，这个概念可以推广到一般的度量空间。

定义1.2.2 设$(\mathscr{X},\rho)$是度量空间。集合$E\subset\mathscr{X}$叫做在$\mathscr{X}$中的稠密子集，如果，$\forall x\in\mathscr{X}$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists z\in E$，使得$\rho(x,z)<\varepsilon$。换句话说：$\forall x\in\mathscr{X}$，$\exists\{x_n\}\subset E$，使得$x_n\to x$。

例1.2.3 $[a,b]$上的多项式全体记为$P[a,b]$。根据Weierstrass定理可知$P[a,b]$在$C[a,b]$中稠密。

定义1.2.4 包含给定度量空间$(\mathscr{X},\rho)$的最小的完备度量空间称为$\mathscr{X}$的完备化空间。其中最小的含意是：任何一个以$(\mathscr{X},\rho)$为子空间的完备度量空间都以此空间为子空间。

命题1.2.5 如果$(\mathscr{X}_1,\rho_1)$是一个以$(\mathscr{X},\rho)$为子空间的完备度量空间，$\rho_1|_{\mathscr{X}\times\mathscr{X}}=\rho$，并且$\mathscr{X}$在$\mathscr{X}_1$中稠密，则$\mathscr{X}_1$是$\mathscr{X}$的完备化空间。

证 事实上，$\forall\xi\in\mathscr{X}_1$，$\exists x_n\in\mathscr{X}$，使得$\rho_1(x_n,\xi)\to 0$，如果存在$(\mathscr{X}_2,\rho_2)$以$(\mathscr{X},\rho)$为子空间。因为

$$\rho_2(x_n,x_m)=\rho_1(x_n,x_m)\to 0\qquad(\text{当}n,m\to\infty),$$

所以$\exists\xi\in\mathscr{X}_2$，使得$\rho_2(x_n,\xi)\to 0$。作映射$T:\mathscr{X}_1\to\mathscr{X}_2$，$T\xi=\xi$。我们还要证$T$是等距的。因为$\forall\eta\in\mathscr{X}_1$，又$\exists y_n\in\mathscr{X}$，使得$\rho_1(y_n,\eta)\to 0$，所以

$$\rho_1(\xi,\eta)=\lim_{n\to\infty}\rho_1(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\rho_2(x_n,y_n)=\rho_2(\xi,\eta).$$

这表明$(\mathscr{X}_1,\rho_1)$是$(\mathscr{X}_2,\rho_2)$的一个子空间。

定理1.2.6 每一个度量空间有一个完备化空间。

证 设$(\mathscr{X},\rho)$是一个度量空间，分三步证明它有一个完备化空间。

(1) 将 $\mathscr{X}$ 中的基本列分类，凡是满足

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=0$$

的两个基本列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$称为等价的。彼此等价的基本列归于同一类且只归一类，称为等价类。我们把一个等价类看成是一个元素，并用 $\mathscr{X}_1$ 表示一切这种元素(等价类)组成的集合。在 $\mathscr{X}_1$ 上定义距离：$\forall\xi,\eta\in\mathscr{X}_1$，任取$\{x_n\}\in\xi$，$\{y_n\}\in\eta$，令

$$\rho_1(\xi,\eta)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n). \qquad (1.2.2)$$

容易验证 (1.2.2) 右端的极限的确存在并且极限值与$\{x_n\}$,$\{y_n\}$的选取无关(请读者自己验证)。为了验证(1.2.2)定义的 ρ_1 的确是个距离，注意到定义1.1.1中的(1)，(2)是显然的，而(3)可由

$$\rho(x_n,y_n)\leqslant\rho(x_n,z_n)+\rho(z_n,y_n)$$

取极限得到，其中$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\}$是分别属于等价类ξ,η,ζ的基本列。这样，我们就证明了$(\mathscr{X}_1,\rho_1)$是一度量空间。

(2) $\forall x\in\mathscr{X}$，我们用$\xi_x\in\mathscr{X}_1$表示包含序列$(x,x,\cdots,x,\cdots)$的等价类，这样的ξ_x全体记为 $\mathscr{X}'$。显然 $\mathscr{X}'\subset\mathscr{X}_1$ 且映射 T：$x\mapsto\xi_x$作为$(\mathscr{X},\rho)\to(\mathscr{X}',\rho_1)$的映射满足定义1.2.1中的(1),(2)。因此，$(\mathscr{X},\rho)$和$(\mathscr{X}',\rho_1)$等距同构，即有$(\mathscr{X},\rho)\subset(\mathscr{X}_1,\rho_1)$。进一步容易验证 $\mathscr{X}$ 在 $\mathscr{X}_1$ 中稠密。

(3) 证明$(\mathscr{X}_1,\rho_1)$是完备的。设$\{\xi^{(n)}\}$是 $\mathscr{X}_1$ 中的基本列。要证$\exists\xi\in\mathscr{X}_1$，使得

$$\rho_1(\xi^{(n)},\xi)\to0 \qquad (n\to\infty).$$

1) 先证特殊情形，假定$\{\xi^{(n)}\}\subset\mathscr{X}'$。令 $x_n=T^{-1}\xi^{(n)}$，则$\{x_n\}$是$\mathscr{X}$中的基本列。设$\{x_n\}\in\xi$，便有$\xi^{(n)}\to\xi$。

2) 一般情形由于 $\mathscr{X}'$ 在$\mathscr{X}_1$中稠密，$\forall\xi^{(n)}\in\mathscr{X}_1$，$\exists\tilde{\xi}^{(n)}\in\mathscr{X}'$，使得$\rho_1(\tilde{\xi}^{(n)},\xi^{(n)})<1/n$。由1)可设$\tilde{\xi}^{(n)}\to\xi\in\mathscr{X}_1$，即可推出$\xi^{(n)}\to\xi$。

最后综合(1),(2),(3)并用命题1.2.5即得结论。

例1.2.7 $P[a,b]$($[a,b]$上的多项式全体) 按距离

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|$$

的完备化空间是 $C[a,b]$。

例1.2.8 $C[a,b]$ 按照(1.2.1)式定义的距离 ρ_1 完备化，完备化空间是 $L^1[a,b]$。

习　题

1.2.1 (空间 S)令 S 为一切实(或复)数列

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$$

组成的集合，在 S 中定义距离为

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|},$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k,\cdots)$。求证 S 为一个完备的距离空间。

1.2.2 在一个度量空间 $(\mathscr{X},\rho)$ 上，求证：基本列是收敛列，当且仅当其中存在一串收敛子列。

1.2.3 设 F 是只有有限项不为 0 的实数列全体，在 F 上引进距离

$$\rho(x,y)=\sup_{k\geqslant 1}|\xi_k-\eta_k|,$$

其中 $x=\{\xi_k\}\in F$, $y=\{\eta_k\}\in F$, 求证 (F,ρ) 不完备，并指出它的完备化空间。

1.2.4 求证：$[0,1]$ 上的多项式全体按距离

$$\rho(p,q)=\int_0^1|p(x)-q(x)|dx\qquad (p,q\text{ 是多项式})$$

是不完备的，并指出它的完备化空间。

1.2.5 在完备的度量空间 $(\mathscr{X},\rho)$ 中给定点列 $\{x_n\}$, 如果 $\forall\varepsilon>0$, 存在基本列 $\{y_n\}$, 使得

$$\rho(x_n,y_n)<\varepsilon\qquad (n\in\mathbb{N}),$$

求证 $\{x_n\}$ 收敛。

§3 列紧集

设$(\mathscr{X},\rho)$是一个距离空间，A是$\mathscr{X}$的一个子集，A称为是有界的，如果$\exists x_0\in\mathscr{X}$及$r>0$，使得$A\subset B(x_0,r)$，其中

$$B(x_0,r)\triangleq\{x\in\mathscr{X}\mid\rho(x,x_0)<r\}.$$

在有穷维欧氏空间，有界无穷集必含有一个收敛子列，但这个性质不能推广到任意的距离空间。

例 在$C[0,1]$上，考察点列

$$x_n(t)=\begin{cases}0 & (t\geqslant 1/n),\\ 1-nt & (t\leqslant 1/n)\end{cases}\qquad (n=1,2,\cdots).$$

显然$\{x_n\}\subset B(\theta,1)$，其中$\theta$表示恒等于0的函数，但是$\{x_n\}$不含有收敛子列。

定义1.3.1 设$(\mathscr{X},\rho)$是一个距离空间，A为其一子集。称A是列紧的，如果A中的任意点列在$\mathscr{X}$中有一个收敛子列。若这个子列还收敛到A中的点，则称A是自列紧的。如果空间$\mathscr{X}$是列紧的，那末称$\mathscr{X}$为列紧空间。

命题1.3.2 在$\mathbf{R}^n$中任意有界集是列紧集，任意有界闭集是自列紧集。

命题1.3.3 列紧空间内任意(闭)子集都是(自)列紧集。

命题1.3.4 列紧空间必是完备空间。

证 设$(\mathscr{X},\rho)$是一个列紧空间，$\{x_n\}$是其中的一串基本列，不妨设其是一无穷点列。由列紧性，存在$\{x_n\}$的子列$\{y_n\}$收敛到$x_0\in\mathscr{X}$。于是由习题1.2.2可知$x_n\to x_0$。 ▌

在度量空间中我们来引入一个比有界性更强的概念。

定义1.3.5(ε网) 设M是$(\mathscr{X},\rho)$中的一个子集，$\varepsilon>0$，$N\subset M$。如果对于$\forall x\in M$，$\exists y\in N$，使得$\rho(x,y)<\varepsilon$，那末称N是M的一个ε网。如果N还是一个有穷集(个数依赖于ε)，那末称N为M的一个有穷ε网。

注 由定义显然有

$$M\subset\bigcup_{y\in N}B(y,\varepsilon).$$

定义1.3.6(完全有界) 集合M称为是完全有界的，如果$\forall\varepsilon>0$，都存在着M的一个有穷ε网。

定理1.3.7(Hausdorff) 为了(完备)距离空间$(\mathscr{X},\rho)$中的集合M是列紧的必须(且仅须)M是完全有界集。

证 必要性。用反证法，若$\exists\varepsilon_0>0$，M中没有有穷的ε_0网。任取$x_1\in M$，$\exists x_2\in M\backslash B(x_1,\varepsilon_0)$；

对$\{x_1,x_2\}\in M$，$\exists x_3\in M\backslash B(x_1,\varepsilon_0)\cup B(x_2,\varepsilon_0)$；

……………………………………………………

对$\{x_1,\cdots,x_n\}\in M$，$\exists x_{n+1}\in M\backslash\bigcup_{k=1}^{n}B(x_k,\varepsilon_0)$；

……………………………………………………

这样产生的点列$\{x_n\}\subset M$显然满足$\rho(x_n,x_m)\geqslant\varepsilon_0$ $(n\neq m)$，它不能有收敛的子列。这与M的列紧性矛盾。

充分性。若$\{x_n\}$是M中的无穷点列，想找一个收敛子列。对1网，$\exists y_1\in M$，$\{x_n\}$的子列$\{x_n^{(1)}\}\subset B(y_1,1)$；

对1/2网，$\exists y_2\in M$，$\{x_n^{(1)}\}$的子列$\{x_n^{(2)}\}\subset B(y_2,1/2)$；

……………………………………………………

对$1/k$网，$\exists y_k\in M$，$\{x_n^{(k-1)}\}$的子列$\{x_n^{(k)}\}\subset B(y_k,1/k)$；

……………………………………………………

最后抽出对角线子列$\{x_k^{(k)}\}$，它是一个基本列。事实上，$\forall\varepsilon>0$，当$n>2/\varepsilon$时，对$\forall p\in\mathbf{N}$有

$$\rho(x_{n+p}^{(n+p)},x_n^{(n)})\leqslant\rho(x_{n+p}^{(n+p)},y_n)+\rho(x_n^{(n)},y_n)$$

$$\leqslant\frac{2}{n}<\varepsilon.$$

定义1.3.8 一个距离空间若有可数的稠密子集，就称为是可分的。

定理1.3.9 完全有界的距离空间是可分的。

证 取N_n为有穷的$1/n$网，则$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n$是一个可数的稠密子集。

定义1.3.10 在拓扑空间$\mathscr{X}$中，集合M称为是紧的，如果$\mathscr{X}$中每个覆盖M的开集族中有有穷个开集覆盖集M。

定理1.3.11 设$(\mathscr{X},\rho)$是一个距离空间，为了M是紧的必须且仅须它是自列紧集。

证 必要性。设M是紧集。先证M是闭集，只要证M的余集是开集。$\forall x_0\in\mathscr{X}\backslash M$，因为

$$M\subset\bigcup_{x\in M}B\left(x,\ \frac{1}{2}\rho(x,x_0)\right),$$

利用M的紧性，$\exists x_k\in M$ $(k=1,2,\cdots,n)$，使得

$$M\subset\bigcup_{k=1}^{n}B\left(x_k,\ \frac{1}{2}\rho(x_k,x_0)\right).$$

取$\delta=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\dfrac{1}{2}\rho(x_k,x_0)$，则显然有$\delta>0$，并且$\forall x\in B(x_0,\delta)$有

$$\rho(x,x_k)\geqslant\rho(x_k,x_0)-\rho(x_0,x)>\delta\qquad(k=1,2,\cdots,n).$$

因此，$B(x_0,\delta)\cap M=\varnothing$，从而$M$的余集是开集得证。

其次证M是列紧集。用反证法。假若有M中的点列$\{x_n\}$不含有收敛子列，不妨假定x_n是互异的。对每个$n\in\mathbf{N}$，作集合$S_n\triangleq\{x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_{n+1},x_{n+2},\cdots\}$，显然每个$S_n$是闭集(因为不含收敛子列)，从而每个$\mathscr{X}\backslash S_n$是开集。但

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathscr{X}\backslash S_n)=\mathscr{X}\backslash\bigcap_{n=1}^{\infty}S_n=\mathscr{X}\backslash\varnothing=\mathscr{X}\supset M,$$

由M的紧性，$\exists N\in\mathbf{N}$，使得$\bigcup\limits_{n=1}^{N}(\mathscr{X}\backslash S_n)\supset M$，即得

$$\mathscr{X}\backslash\{x_n\}_{n=N+1}^{\infty}\supset M,$$

但这是不可能的，因为 x_{N+1} 属于上式右端而不属于上式左端。此矛盾说明M是列紧的。

充分性。设M是自列紧的，要在M的任一开覆盖中取出有限覆盖。用反证法，如果某个开覆盖$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda\supset M$ 不能取出M的有限覆盖。由于M是自列紧的，$\forall n\in\mathbb{N}$，存在有穷的 $1/n$ 网

$$N_n=\{x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_{k(n)}^{(n)}\},$$

显然 $\bigcup\limits_{y\in N_n}B(y,1/n)\supset M$。因此，$\forall n\in\mathbb{N}$，$\exists y_n\in N_n$，使得$B(y_n,1/n)$不能被有限个 G_λ 所覆盖。由假定M是自列紧集，必存在收敛子列y_{n_k} 收敛到一点 $y_0\in G_{\lambda_0}$。又 G_{λ_0} 是开集，所以$\exists\delta>0$，使得 $B(y_0,\delta)\subset G_{\lambda_0}$。对此 $\delta>0$，取 k 足够大，使得 $n_k>2/\delta$，并且 $\rho(y_{n_k},y_0)<\delta/2$，则$\forall x\in B(y_{n_k},1/n_k)$有

$$\rho(x,y_0)\leqslant\rho(x,y_{n_k})+\rho(y_{n_k},y_0)\leqslant\frac{1}{n_k}+\frac{\delta}{2}<\delta,$$

即 $x\in B(y_0,\delta)$，从而 $B(y_{n_k},1/n_k)\subset B(y_0,\delta)\subset G_{\lambda_0}$。这与每个$B(y_n,1/n)$不能被有限个 G_λ 所覆盖矛盾。∎

我们曾考察过区间$[a,b]$上的连续函数空间 $C[a,b]$，现在稍微作一点推广。设M是一个紧的距离空间，带有距离ρ，用 $C(M)$ 表示 $M\to\mathbb{R}^1$ 的一切连续映射全体。定义

$$\mathrm{d}(u,v)=\max_{x\in M}|u(x)-v(x)|\quad(\forall u,v\in C(M))。\tag{1.3.1}$$

命题1.3.12 $(C(M),d)$是一个距离空间。

证 其实只有定义本身的合理性是要验证的。即，对 $\forall u\in C(M)$，存在着最大值$\max\limits_{x\in M}|u(x)|$。事实上，$u(M)$是紧集。因为对任意点列 $y_n\in u(M)$，$\exists x_n\in M$，使得 $u(x_n)=y_n$。由于 M 是紧的，从而有子列$x_{n_k}\to x_0$，而 u 是连续的，便有 $u(x_{n_k})\to u(x_0)\in u(M)$。令$y_0\triangleq u(x_0)$，即得 $y_{n_k}=u(x_{n_k})\to y_0$，从而 $u(M)$ 是紧集。这蕴含 $u(M)$是有界闭的数集。设

$$\min u(M) = \alpha; \qquad \max u(M) = \beta,$$

由闭性推出 $\alpha,\beta\in u(M)$。这就证明了 $\max\limits_{x\in M}|u(x)|$的存在性。

命题1.3.13 $(C(M),d)$是完备的。

证明留给读者作为习题。

现在我们来讨论连续函数空间上列紧集的刻划。

定义1.3.14 设F是$C(M)$的一个子集。称它是一致有界的，如果$\exists M_1>0$，使得$|\varphi(x)|\leqslant M_1$ $(\forall x\in M,\ \forall \varphi\in F)$；称它是等度连续的，如果$\forall \varepsilon>0$，总可以找到$\delta(\varepsilon)>0$，使得

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|<\varepsilon \qquad (\forall x_1,x_2\in M,\rho(x_1,x_2)<\delta,\forall\varphi\in F).$$

定理1.3.15(Arzela-Ascoli) 为了$F\subset C(M)$是一个列紧集，必须且仅须F是一致有界且等度连续的函数族。

证 因为$C(M)$是完备的，所以由定理1.3.7，为了F是列紧的必须且仅须它是完全有界的。

必要性。因为完全有界集是有界集，所以F是一致有界函数族。$\forall\varepsilon>0$，要证$\exists\delta=\delta(\varepsilon)$，使得$\forall\varphi\in F$有

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|<\varepsilon \qquad (\text{当}\rho(x_1,x_2)<\delta).$$

因为F的$\varepsilon/3$网是一个有穷集$N(\varepsilon/3)=\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\}$，对这有穷个函数，由连续性，$\exists\delta=\delta(\varepsilon/3)$，当$\rho(x_1,x_2)<\delta$有

$$|\varphi_i(x_1)-\varphi_i(x_2)|<\varepsilon/3 \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

因为$\forall\varphi\in F$，$\exists\varphi_i\in N(\varepsilon/3)$，使得$d(\phi,\phi_i)<\varepsilon/3$，所以

$$\begin{aligned}&|\varphi(x)-\varphi(x')|\\&\leqslant|\varphi(x)-\varphi_i(x)|+|\varphi_i(x)-\varphi_i(x')|+|\varphi_i(x')-\varphi(x')|\\&\leqslant 2d(\varphi,\varphi_i)+|\varphi_i(x)-\varphi_i(x')|<\varepsilon \qquad (\text{当}\ \rho(x,x')<\delta).\end{aligned}$$

充分性。设F一致有界且等度连续，我们要找有穷的ε网。由于F是等度连续的，$\exists\delta=\delta(\varepsilon/3)>0$，使得当$\rho(x,x')<\delta$时，$|\varphi(x)-\varphi(x')|<\varepsilon/3$ $(\forall\varphi\in F)$。就此δ，选取空间M上的有穷δ网$N(\delta)=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$。作映射$T:F\to\mathbf{R}^n$，

$$T\varphi\triangleq(\varphi(x_1),\varphi(x_2),\cdots,\varphi(x_n)) \qquad (\forall\varphi\in F).$$

记 $\tilde{F}=T(F)$，则 $\tilde{F}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集。事实上，设 $|\varphi|\leqslant M_1(\forall \varphi\in F)$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|\varphi(x_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{n}\max_{x\in M}|\varphi(x)|\leqslant\sqrt{n}M_1\quad(\forall\varphi\in F).$$

从而 $\tilde{F}$ 是列紧集，利用定理1.3.7，$\tilde{F}$ 有有穷的 $\varepsilon/3$ 网

$$\tilde{N}(\varepsilon/3)=\{T\varphi_1,T\varphi_2,\cdots,T\varphi_m\}.$$

从而 $\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m\}$ 是 F 的 ε 网，这是因为 $\forall\varphi\in F$，$\exists\varphi_i$，使得 $\rho_n(T\varphi,T\varphi_i)<\varepsilon/3$，于是取定 $x_r\in N(\delta)$，使得 $\rho(x,x_r)<\delta$，有

$$\begin{aligned}&|\varphi(x)-\varphi_i(x)|\\&\leqslant|\varphi(x)-\varphi(x_r)|+|\varphi(x_r)-\varphi_i(x_r)|+|\varphi_i(x_r)-\varphi_i(x)|\\&<\frac{2}{3}\varepsilon+\rho_n(T\varphi,T\varphi_i)<\varepsilon,\end{aligned}$$

其中 ρ_n 表示 $\mathbf{R}^n$ 上的距离。

例1.3.16 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是有界开凸集。若 M_1,M_2 是两个给定的正数，则集合

$$F\triangleq\{\varphi\in C^{(1)}(\bar{\Omega})\mid|\varphi(x)|\leqslant M_1,\quad|\mathrm{grad}\,\varphi(x)|\leqslant M_2\quad(\forall x\in\Omega)\}$$

是 $C(\bar{\Omega})$ 上的一个列紧集，其中 $C^{(1)}(\bar{\Omega})$ 表示 $\bar{\Omega}$ 上的连续可微函数全体。

证 因为 $\forall\varphi\in F$，$\forall x_1,x_2\in\bar{\Omega}$，$\exists\theta\in(0,1)$，使得

$$\varphi(x_1)-\varphi(x_2)=\mathrm{grad}\,\varphi(\theta x_1+(1-\theta)x_2)\cdot(x_1-x_2),$$

所以 $$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\leqslant M_2\rho_n(x_1,x_2)\qquad(\forall\varphi\in F).$$

这表明 F 是等度连续的。此外 F 显然是一致有界的。

习　题

1.3.1 在度量空间中求证：为了子集 A 是列紧的，其充分且必要条件是对 $\forall\varepsilon>0$，存在 A 的列紧的 ε 网。

1.3.2 在度量空间中求证：紧集上的连续函数必是有界的，并且达到它的上、下确界。

1.3.3 在度量空间中求证：完全有界的集合是有界的，并

通过考虑 l^2 的子集 $E=\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$，其中

$$e_k=\{\underbrace{0,0,\cdots,1}_{\text{第 } k \text{ 个}},0,\cdots\},$$

来说明一个集合可以是有界但不完全有界。

1.3.4　设$(\mathscr{X},\rho)$是度量空间，F_1,F_2 是它的两个紧子集，求证 $\exists x_i\in F_i(i=1,2)$，使得 $\rho(F_1,F_2)=\rho(x_1,x_2)$，其中

$$\rho(F_1,F_2)\triangleq\inf\{\rho(x,y)\,|\,x\in F_1,y\in F_2\}.$$

1.3.5　设M是 $C[a,b]$ 中的有界集，求证：集合

$$\left\{F(x)=\int_a^x f(t)dt\,\middle|\,f\in M\right\}$$

是列紧集。

1.3.6　设 $E=\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$，求证：$E$ 在 $C[0,\pi]$ 中不是列紧的。

1.3.7　求证 S 空间(定义见习题1.2.1)的子集 A 列紧的充要条件是：$\forall n\in\mathbf{N}$，$\exists C_n>0$，使得对 $\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in A$，有$|\xi_n|\leqslant C_n(n=1,2,\cdots)$。

1.3.8　设$(\mathscr{X},\rho)$是完备的度量空间，M是$\mathscr{X}$中的列紧集，映射 $f:\mathscr{X}\to M$ 满足

$$\rho(f(x_1),f(x_2))<\rho(x_1,x_2)\qquad(\forall x_1,x_2\in\mathscr{X},x_1\neq x_2).$$

求证：f 在$\mathscr{X}$中存在唯一的不动点。

1.3.9　设(M,ρ)是一个紧距离空间，又 $E\subset C(M)$，E 中的函数一致有界并满足下列 Hölder 条件：

$$|x(t_1)-x(t_2)|\leqslant C\rho(t_1,t_2)^{\alpha}\qquad(\forall x\in E,\forall t_1,t_2\in M),$$

其中$0<\alpha\leqslant1$，$C>0$，求证E 在 $C(M)$中是列紧集。

§4　线性赋范空间

上一节我们在距离空间上讨论了映射的不动点问题。然而距离空间只有拓扑结构，对于许多分析问题只考虑拓扑结构不考虑

代数结构是不够用的，因为在分析中通常遇到的函数空间，不但要考察收敛而且要考虑到元素间的代数运算。

4.1 线性空间

在线性代数中，我们学过线性空间的概念。

定义1.4.1 设$\mathscr{X}$是一个非空集，$\mathbb{K}$ 是复(或实)数域。如果下列条件满足，便称$\mathscr{X}$为一复(或实)线性空间，

(1) $\mathscr{X}$是一加法交换群，即对$\forall x,y\in\mathscr{X}$，$\exists u\in\mathscr{X}$，记作$u=x+y$ 称为 x,y 之和，适合

(1.1) $x+y=y+x$；

(1.2) $(x+y)+z=x+(y+z)$；

(1.3) 存在唯一的$\theta\in\mathscr{X}$，对$\forall x\in\mathscr{X}$，$x+\theta=\theta+x$；

(1.4) 对任意的$x\in\mathscr{X}$，$\exists|\, x'\in\mathscr{X}$，使得$x+x'=\theta$，记此$x'$为$-x$。

(2) 定义了数域$\mathbb{K}$中的数α与$x\in\mathscr{X}$的数乘运算，即$\forall(\alpha,x)\in\mathbb{K}\times\mathscr{X}$，$\exists u\in\mathscr{X}$，记作$u=\alpha x$称为$x$对$\alpha$的数乘，适合

(2.1) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x \quad (\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K},\forall x\in\mathscr{X})$；

(2.2) $1\cdot x=x$；

(2.3) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x \quad (\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K},\forall x\in\mathscr{X})$，

$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y \quad (\forall x,y\in\mathscr{X},\forall\alpha\in\mathbb{K})$。

线性空间的元素又称为向量，因而线性空间又称为向量空间。下述概念是线性空间的基本概念。

线性同构 设$\mathscr{X}$，$\mathscr{X}_1$都是线性空间，$T:\mathscr{X}\to\mathscr{X}_1$称为是一个线性同构，如果

(1) 它既是单射又是满射，即它是一对一的并且是在上的。

(2) $T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty \quad (\forall x,y\in\mathscr{X},\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K})$。

线性子空间 设$E\subset\mathscr{X}$，若E依$\mathscr{X}$上的加法与数乘还构成一个线性空间，则称E是$\mathscr{X}$的一个线性子空间。

$\mathscr{X}$以及$\{\theta\}$都是$\mathscr{X}$的线性子空间，我们称它们为平凡的子空间，而称其它的子空间为真子空间。

线性流形 设$E\subset\mathscr{X}$，若$\exists x_0\in\mathscr{X}$及线性子空间$E_0\subset\mathscr{X}$，使得$E=E_0+x_0\triangleq\{x+x_0|x\in E_0\}$，则称$E$为线性流形。简单地说，线性流形就是子空间对某个向量的平移。

线性相关 一组向量$x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathscr{X}$称为是线性相关的，如果存在$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbf{K}$不全为0，使得

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n=0;$$

否则称为是线性无关的。

线性基 若A是$\mathscr{X}$中的一个极大线性无关向量组，即A中的向量是线性无关的，而且任意的$x\in\mathscr{X}$都是A中的向量的线性组合，则称A是$\mathscr{X}$的一组**线性基**。

维数 线性空间中的线性基的元素个数(势)，称为维数。

线性包 设Λ是一个指标集，$\{x_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是$\mathscr{X}$中的向量族，一切由$\{x_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$的有穷线性组合组成的集合

$$\{y=a_1x_{\lambda_1}+\cdots+a_nx_{\lambda_n}|\lambda_i\in\Lambda,a_i\in\mathbf{K},\ i=1,2,\cdots,n\}$$

称为$\{x_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$的线性包。这线性包是一个线性子空间，不难证明它是包含$\{x_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$的一切线性子空间的交。因此称线性包为$\{x_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$张成的线性子空间，记为

$$\operatorname{span}\{x_\lambda|\lambda\in\Lambda\}.$$

线性和与直接和 设E_1,E_2是$\mathscr{X}$的子空间，我们称集合$\{x+y|x\in E_1,\ y\in E_2\}$为$E_1$与$E_2$**的线性和**，记为$E_1+E_2$。对于任意有限个子空间，定义依此类推。又若$(E_1,E_2)$中的任意一对非零向量都是线性无关的，则称线性和$E_1+E_2$为直接和，记作$E_1\oplus E_2$，这时$E_1\cap E_2=\{\theta\}$，对$\forall x\in E_1\oplus E_2$，有唯一的分解：$x=x_1+x_2(x_i\in E_i,i=1,2)$。

4.2 线性空间上的距离

我们引进过一个空间$\mathscr{X}$的代数结构——线性空间，也引进过它的拓扑结构——距离ρ，现在要把这两者结合起来，即是要求

(1) 距离的平移不变性；

$$\rho(x+z,y+z)=\rho(x,y)\qquad(\forall\, x,y,z\in\mathscr{X}).$$

由此推出，ρ 对加法是连续的，即

$$\left.\begin{array}{l}\rho(x_n,x)\to 0\\ \rho(y_n,y)\to 0\end{array}\right\}\Rightarrow\rho(x_n+y_n,x+y)\to 0.$$

事实上，
$$\begin{aligned}\rho(x_n+y_n,x+y)&=\rho(x_n+y_n-x-y,\theta)\\&=\rho(x_n-x,y-y_n)\\&\leqslant\rho(x_n-x,\theta)+\rho(y-y_n,\theta)\\&=\rho(x_n,x)+\rho(y,y_n)\to 0\qquad(\text{当}n\to\infty).\end{aligned}$$

反之，如果距离 ρ 对加法连续，则满足平移不变性．证明详见关肇直，张恭庆，冯德兴著的《线性泛函分析入门》一书．

(2) 数乘的连续性：

(2.1) $\rho(x_n,x)\to 0\Rightarrow\rho(\alpha x_n,\alpha x)\to 0\quad(\forall\,\alpha\in\mathbb{K})$；

(2.2) $\alpha_n\to\alpha(\mathbb{K})\Rightarrow\rho(\alpha_n x,\alpha x)\to 0\quad(\forall\, x\in\mathscr{X})$.

若令 $p:\mathscr{X}\to\mathbb{R}^1$，$p(x)\triangleq\rho(x,\theta)\quad(\forall\, x\in\mathscr{X})$，则由（1）

$$p(x-y)=\rho(x-y,\theta)=\rho(x,y).$$

这时由距离公理逐条化为函数 p 的条件：

$\rho(x,y)\geqslant 0\Longleftrightarrow p(x)\geqslant 0\quad(\forall\, x,y\in\mathscr{X})$；

$\rho(x,y)=0$，当且仅当 $x=y\Longleftrightarrow p(x)=0$，当且仅当 $x=\theta$；

$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)\Longleftrightarrow p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$；

$\rho(x,y)=\rho(y,x)\Longleftrightarrow p(-x)=p(x)$.

此外，
$$\begin{aligned}&(2.1)\Longleftrightarrow p(\alpha x_n)\to 0\qquad(\text{当 }p(x_n)\to 0);\\&(2.2)\Longleftrightarrow p(\alpha_n x)\to 0\qquad(\text{当 }\alpha_n\to 0).\end{aligned}$$

于是导向下列

定义1.4.2 线性空间 $\mathscr{X}$ 上的准范数(准模）定义为这空间上的一个函数 $\|\cdot\|:\mathscr{X}\to\mathbb{R}^1$，满足条件：

(1) $\|x\|\geqslant 0\quad(\forall\, x\in\mathscr{X})$；$\|x\|=0\Longleftrightarrow x=\theta$；

(2) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|\quad(\forall\, x,y\in\mathscr{X})$；

(3) $\|-x\|=\|x\|\quad(\forall\, x\in\mathscr{X})$；

(4) $\lim\limits_{\alpha_n\to 0}\|\alpha_n x\|=0,\quad \lim\limits_{\|x_n\|\to 0}\|\alpha x_n\|=0$ $(\forall x\in\mathscr{X},\ \forall\alpha\in\mathbf{K})$.

定义1.4.3 一个赋准范数的线性空间$\mathscr{X}$，如果按照

$$\|x_n-x\|\to 0\qquad(\text{当}n\to\infty)$$

来定义$x_n\to x$，那么便称其为F^*空间。

定义1.4.4 完备的F^*空间称为Frechet空间，简称F空间。

F^*空间的例子很多。

例1.4.5 空间$C(M)$（M是一个紧距离空间）。显然

$$\|u\|=\max_{x\in M}|u(x)|$$

是一个准范数，$C(M)$是一个F空间。

例1.4.6 Euclid空间$\mathbb{R}^n$。设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，定义

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

显然它是一个准范数，$\mathbb{R}^n$是一个F空间。

例1.4.7 空间S。用S表示一切序列$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$组成的线性空间，加法与数乘按自然方式定义：

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n,\cdots),$$
$$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n,\cdots)\qquad(\alpha\in\mathbf{K}),$$

其中$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)$。对$\forall x\in S$定义

$$\|x\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\ \frac{|x_n|}{1+|x_n|},$$

那末它是一个准范数。事实上，准范数的条件(1),(3)是明显成立的。今先证(2)，注意到初等不等式

$$\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}=\frac{\alpha}{1+\alpha+\beta}+\frac{\beta}{1+\alpha+\beta}\leqslant\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{\beta}{1+\beta}\quad(\forall\alpha,\beta>0),$$

便得到

$$\|x+y\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n+y_n|}{1+|x_n+y_n|}$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n|+|y_n|}{1+|x_n|+|y_n|}$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{|x_n|}{1+|x_n|}+\frac{|y_n|}{1+|y_n|}\right)$$

$$=\|x\|+\|y\|$$

其次验证(4)．因为还有初等不等式

$$\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}\leqslant\begin{cases}\alpha\dfrac{\beta}{1+\beta} & (\text{当}\alpha\geqslant 1\quad \beta\geqslant 0),\\[2mm] \dfrac{\beta}{1+\beta} & (\text{当}0<\alpha<1,\beta\geqslant 0),\end{cases}$$

所以 $\forall\alpha\in\mathbf{K}$ 有

$$\|\alpha x_n\|\leqslant\max(|\alpha|,1)\|x_n\|\to 0\qquad(\text{当}\|x_n\|\to 0).$$

又若 $|\alpha_m|\to 0$，$\forall\varepsilon>0$，取 n_0，使得 $1/2^{n_0}<\varepsilon/2$，固定住 n_0。取 $N=N(\varepsilon/2)$，使得当 $m>N$ 时有

$$|\alpha_m|\max_{1\leqslant i\leqslant n_0}|x_i|<\frac{\varepsilon}{2},$$

则

$$\|\alpha_m x\|=\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{2^n}\frac{|\alpha_m x_n|}{1+|\alpha_m x_n|}+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|\alpha_m x_n|}{1+|\alpha_m x_n|}$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这就证明了 S 是一个 F^* 空间

最后再验证完备性。若

$$\|x^{(m+p)}-x^{(m)}\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n^{(m+p)}-x_n^{(m)}|}{1+|x_n^{(m+p)}-x_n^{(m)}|}\to 0$$

（当$m\to\infty$，$\forall p\in\mathbf{N}$），则对$\forall n\in\mathbf{N}$，$|x_n^{(m+p)}-x_n^{(m)}|\to 0$（当$m\to\infty$，$\forall p\in\mathbf{N}$）。于是存在$x_n^*$，使得$x_n^{(m)}\to x_n^*$（当$m\to\infty$）。因此，$\forall\varepsilon>0$，取$n_0$，使得$1/2^{n_0}<\varepsilon/2$，再取$N$，使得当$m>N$时有

$$|x_n^{(m)}-x_n^*|<\varepsilon/2\quad(n=1,2,\cdots,n_0),$$

便得到

$$\begin{aligned}\|x^{(m)}-x^*\|&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n^{(m)}-x_n^*|}{1+|x_n^{(m)}-x_n^*|}\\&\leqslant\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{2^n}|x_n^{(m)}-x_n^*|+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\qquad(\text{当}m>N),\end{aligned}$$

其中$x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*,\cdots)$。于是$S$是一个$F$空间。

注 由上面的推演不难看出：点列

$$x^{(m)}=(x_1^{(m)},x_2^{(m)},\cdots,x_n^{(m)},\cdots)\qquad(m=1,2,\cdots)$$

收敛于$\theta=(0,0,\cdots,0,\cdots)$（当$m\to\infty$），必须且仅须对每个正整数$n$都有$x_n^{(m)}\to 0$（当$m\to\infty$）。这意味着按$S$距离收敛与按坐标收敛是等价的。

例1.4.8 $C(\mathbb{R}^n)$空间表示$\mathbb{R}^n$上一切连续函数全体，并令

$$\|u\|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\max\limits_{|x|\leqslant k}|u(x)|}{1+\max\limits_{|x|\leqslant k}|u(x)|},$$

其中$u(x)\in C(\mathbb{R}^n)$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$。这时$\|\cdot\|$是一个准范数，并且$C(\mathbb{R}^n)$构成一个$F$空间。

4.3 范数与Banach空间

考察以上诸例，还可以发现如下差异，例1.4.5和例1.4.6的准范数具有齐次性：

$$\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|\qquad(\forall\alpha\in\mathbf{K},\ \forall x\in\mathscr{X}).$$

而例1.4.7和例1.4.8的准范数则不具有此性质。

具有齐次性的准范数叫做范数，有时又称为模，也就是

定义1.4.9 线性空间$\mathscr{X}$上的范数$\|\cdot\|$是一个非负值函数：$\mathscr{X}\to\mathbb{R}^1$满足

(1) $\|x\|\geqslant 0$ $(\forall x\in\mathscr{X})$，$\|x\|=0\Longleftrightarrow x=\theta$(正定性)；

(2) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ $(\forall x,y\in\mathscr{X})$(三角形不等式)；

(3) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$ $(\forall\alpha\in\mathbb{K},\forall x\in\mathscr{X})$(齐次性)。

显然范数必是准范数。

定义1.4.10 当赋准范数的线性空间中的准范数是范数时，这空间叫做线性赋范空间，或称B^*空间。完备的B^*空间叫做B空间或Banach空间。

除了上面的例1.4.1和1.4.2外，我们再举一些经常遇到的函数空间是B空间的例子。

例1.4.11 空间$L^p(\Omega,\mu)(1\leqslant p<\infty)$。设$(\Omega,\mathscr{B},\mu)$是一个测度空间，$u$是$\Omega$上的可测函数，而且$|u(x)|^p$在$\Omega$上是可积的。这种函数$u$的全体记作$L^p(\Omega,\mu)$，叫做$(\Omega,\mathscr{B},\mu)$上的$p$次可积函数空间。$L^p(\Omega,\mu)$按通常的加法与数乘规定运算，并且把几乎处处相等的两个函数看成是同一个向量，经这样处理过的空间$L^p(\Omega,\mu)$仍是一个线性空间，并且定义

$$\|u\|=\left(\int_\Omega|u(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

那末$\|\cdot\|$是一个范数。这是因为(1),(3)都是显然的，而(2)正是著名的Minkowski不等式：

$$\left(\int_\Omega|u(x)+v(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_\Omega|u(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_\Omega|v(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

又由Riesz-Fisher定理，$L^p(\Omega,\mu)$还是一个B空间。

注 本例有两个重要的特殊情形：

(1) Ω是$\mathbb{R}^n$中的一个可测集，而$d\mu$即是普通的Lebesgue测度，这时，对应的空间记作$L^p(\Omega)$。

(2) $\Omega=\mathbb{N}$，而测度μ是等分布的：$\mu(\{n\})=1(\forall n\in\mathbb{N})$，这时空间$L^p(\Omega,\mu)$由满足$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|^p<\infty$的序列$u=\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$组成，

对应的空间记作l^p，其范数是

$$\|u\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

例1.4.12 空间 $L^\infty(\Omega,\mu)$。设$(\Omega,\mathscr{B},\mu)$是一个测度空间，μ对于Ω是σ有限的，$u(x)$是Ω上的可测函数。如果$u(x)$与Ω上的一个有界函数几乎处处相等，则称$u(x)$是Ω上的一个本性有界可测函数。Ω上的一切本性有界可测函数（把p.p.相等的两个函数视为同一个向量）的全体记作$L^\infty(\Omega,\mu)$，在其上规定

$$\|u\| = \inf_{\substack{\mu(E_0)=0 \\ E_0\subset\Omega}} \left(\sup_{x\in\Omega\setminus E_0} |u(x)|\right), \qquad (1.4.1)$$

此式右端有时也记作$\operatorname{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega}|u(x)|$或$\operatorname{l.u.b}\limits_{x\in\Omega}|u(x)|$。显然$L^\infty(\Omega,\mu)$是一个线性空间，以下验证$\|\cdot\|$是一个范数。事实上，(3)及$\|u\|\geqslant 0$都是显然的，需验证：

(1) $\|u\|=0 \Longleftrightarrow u=\theta$。充分性是显然的。为了证必要性，若$\|u\|=0$，则$\forall n\in\mathbf{N}$，$\exists E_n\subset\Omega$，使得$\mu(E_n)=0$，并且

$$\sup_{x\in\Omega\setminus E_n} |u(x)| < \frac{1}{n}.$$

令
$$\Omega_1 \triangleq \bigcap_{n=1}^{\infty}(\Omega\setminus E_n) = \Omega\setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

因为$u(x)=0$(当$x\in\Omega_1$)，$\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)=0$，所以$u(x)=0$(p.p.$x\in\Omega$)，即$u=\theta$。

(2) $\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\|$。$\forall\varepsilon>0$，$\exists E_0,E_1\subset\Omega$，使得$\mu(E_0)=\mu(E_1)=0$，且$\sup\limits_{x\in\Omega\setminus E_0}|u(x)|\leqslant\|u\|+\varepsilon/2$，

$$\sup_{x\in\Omega\setminus E_1}|v(x)| \leqslant \|v\|+\varepsilon/2.$$

因此
$$\|u+v\| \leqslant \sup_{x\in\Omega\setminus(E_0\cup E_1)} |u(x)+v(x)|$$
$$\leqslant \sup_{x\in\Omega\setminus E_0}|u(x)| + \sup_{x\in\Omega\setminus E_1}|v(x)|$$

$$\leqslant \|u\| + \|v\| + \varepsilon,$$

而 $\varepsilon>0$ 是任意的，即得所要证的结论。

最后来证 $L^\infty(\Omega,\mu)$是完备的．设

$$\|u_{n+p} - u_n\| \to 0 \qquad (当 n\to\infty,\ \forall p\in \mathbf{N}). \qquad (1.4.2)$$

因为 Ω是 σ- 有限的，所以$\Omega = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\Omega_m$，$\mu(\Omega_m)<\infty$，并不妨假定 Ω_m 是互不相交的。(1.4.2)蕴含

$$\int_{\Omega_m} |u_{n+p}(x) - u_n(x)|dx \to 0 \qquad (当 n\to\infty,\ \forall p\in \mathbf{N})$$

因此，根据 $L^1(\Omega_m)$的完备性，$\exists u^{(m)}(x)\in L^1(\Omega_m)$，使得

$$u_n(x) \xrightarrow{L^1(\Omega_m)} u^{(m)}(x) \qquad (当 n\to\infty). \qquad (1.4.3)$$

于是$\forall m\in \mathbf{N}$，存在$\{u_n(x)\}$的子列$\{v_n^{(m)}(x)\}$，使得

$$v_n^{(m)}(x) \to u^{(m)}(x) \qquad (当 n\to\infty,\ \text{p.p.}\ x\in\Omega_m),$$

并且$\{v_n^{(m)}(x)\}$是$\{v_n^{(m-1)}(x)\}$的子列($m>1$)。若令

$$u(x) \triangleq u^{(m)}(x) \qquad (当 x\in\Omega_m,\ m=1,2,\cdots),$$

则 $$v_n^{(n)}(x) \to u(x) \qquad (当 n\to\infty,\ \text{p.p.}\ x\in\Omega).$$

进一步不妨假定$\{u_n(x)\}$的子列$\{v_n^{(n)}(x)\}$就是本身，即有

$$u_n(x) \to u(x) \qquad (当 n\to\infty,\ \text{p.p.}\ x\in\Omega).$$

现在证明 $u\in L^\infty(\Omega,\mu)$以及$\|u_n - u\|\to 0$。事实上，根据 (1.4.2)，$\forall \varepsilon>0$，$\exists N=N(\varepsilon)$，使得当 $n\geqslant N$ 时，对$\forall p\in\mathbf{N}$有

$$\|u_{n+p} - u_n\| < \varepsilon.$$

因此，对$\forall p\in \mathbf{N}$，$\forall n\geqslant N$，$\exists E_n^{(p)}\subset\Omega$，使得 $\mu(E_n^{(p)})=0$，并且

$$\sup_{x\in\Omega\setminus E_n^{(p)}} |u_{n+p}(x) - u_n(x)| < \varepsilon.$$

若令 $E_n \triangleq \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} E_n^{(p)}$，则 $\mu(E_n)=0$，并且对$\forall p\in\mathbf{N}$，$\forall n\geqslant N$ 有

$$\sup_{x\in\Omega\setminus E_n} |u_{n+p}(x) - u_n(x)| < \varepsilon.$$

令 $p\to\infty$ 得

$$\sup_{x\in\Omega\setminus E_\varepsilon}|u_n(x)-u(x)|\leqslant\varepsilon.$$

因此$u\in L^\infty(\Omega,\mu)$，以及$\|u_n-u\|\leqslant\varepsilon$。这就是所要证的。

注 当Ω是$\mathbb{R}^n$中的一个可测集时，对应的空间记作$L^\infty(\Omega)$；当$\Omega=\mathbf{N}$时，对应的空间记作l^∞，它是由一切有界序列$u=\{u_n\}$组成的空间，其范数是$\|u\|=\sup\limits_{n\geqslant 1}|u_n|$。

例1.4.13 $C^k(\bar{\Omega})$。设Ω是$\mathbb{R}^n$中的一个有界连通开区域，$k\in\mathbf{N}$，用$C^k(\bar{\Omega})$表示在$\bar{\Omega}$上具有直到k阶连续偏导数的函数$u(x)=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全体，加法与数乘按自然法则定义，再规定范数为

$$\|u\|=\max_{|\alpha|\leqslant k}\max_{x\in\bar{\Omega}}|\partial^\alpha u(x)|,\tag{1.4.4}$$

其中$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，以及

$$\partial^\alpha u_n(x)=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}u(x).\tag{1.4.5}$$

容易验证(1.4.4)定义的$\|\cdot\|$是一个范数，从而$C^k(\bar{\Omega})$是一个线性赋范空间。再证它是完备的，从而是Banach空间。事实上，若$\{u_n\}$是一个基本列，则必存在连续函数v_α，使得

$$\partial^\alpha u_n(x)\rightrightarrows v_\alpha(x)\quad(n\to\infty,\ |\alpha|\leqslant k,\ 对\ x\in\bar{\Omega}一致).$$

我们只要再证明$v_\alpha=\partial^\alpha v_\theta$就够了。先证

$$v_{(1,0,\cdots,0)}=\frac{\partial}{\partial x_1}v_{(0,0,\cdots,0)}.\tag{1.4.6}$$

因为 $\dfrac{\partial}{\partial x_1}u_n(x)\rightrightarrows v_{(1,0,\cdots,0)}(x)\quad(n\to\infty,\ 对\ x\in\bar{\Omega}一致)$；

$$u_n(x)\rightrightarrows v_{(0,0,\cdots,0)}(x)\quad(n\to\infty,\ 对\ x\in\bar{\Omega}一致);$$

以及

$$u_n(x)=\int_{x_1^0}^{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}u_n(\xi,x_2,\cdots,x_n)d\xi+u_n(x_1^0,x_2,\cdots,x_n),$$

所以有

$$v_{(0,0,\cdots,0)}(x)$$

$$=\int_{x_1^0}^{x_1} v_{(1,0,\cdots,0)}(\xi,x_2,\cdots,x_n)d\xi+v_{(0,0,\cdots,0)}(x_1^0,x_2,\cdots,x_n),$$

即得(1.4.6)。同理有

$$v_{\underbrace{(0,0,\cdots,0,1}_{j},0,\cdots,0)}=\frac{\partial}{\partial x_j}v_{(0,0,\cdots,0)} \qquad (j=2,3,\cdots,n).$$

其余对$|\alpha|$用数学归纳法类推。

例1.4.14 Соболев 空间 $H^{m,p}(\Omega)$. 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个有界连通开区域，m 是一个非负整数，$1\leqslant p<\infty$，对于 $C^k(\bar{\Omega})$ 中的任意 u，代替范数(1.4.4)定义

$$\|u\|_{m,p}=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega|\partial^\alpha u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (1.4.7)$$

不难验证$\|\cdot\|_{m,p}$是范数，但$C^k(\bar{\Omega})$依$\|\cdot\|_{m,p}$不是完备的。

根据§2，我们知道任意不完备的线性赋范空间$\mathscr{X}$，可以把它完备化，即确定一个完备的线性赋范空间$\widetilde{\mathscr{X}}$，$\mathscr{X}$可以连续地嵌入$\widetilde{\mathscr{X}}$成为其稠密的子空间。将$C^m(\Omega)$的子集

$$S\triangleq\{u\in C^m(\Omega)\,|\,\|u\|_{m,p}<\infty\}$$

按照模(1.4.7)完备化，得到的完备化空间称为Соболев空间，记作$H^{m,p}(\Omega)$。它在偏微分方程论中起着非常基本的重要作用。特别当$p=2$时，$H^{m,2}(\Omega)$简单地记成$H^m(\Omega)$。

4.4 线性赋范空间上的模等价

在许多分析问题中，引进范数或引进距离是为了研究一种收敛性。因此，如果我们关心的只是按照一定意义的收敛性而不是距离本身的大小，那末在空间上我们就可以认为决定同一种收敛性的不同范数是等价的，确切地说：

定义1.4.15 设在线性空间$\mathscr{X}$上给定了两个范数$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$，我们说$\|\cdot\|_2$比$\|\cdot\|_1$强，是指

$$\|x_n\|_2\to 0\Rightarrow\|x_n\|_1\to 0\qquad(当 n\to\infty)。$$

如果$\|\cdot\|_2$比$\|\cdot\|_1$强而且$\|\cdot\|_1$又比$\|\cdot\|_2$强，则称$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$等价。

命题1.4.16 为了$\|\cdot\|_2$比$\|\cdot\|_1$强，必须且仅须存在常数$C>0$，使得

$$\|x\|_1\leqslant C\|x\|_2\qquad(\forall x\in\mathscr{X})。\tag{1.4.8}$$

证 充分性是显然的。下证必要性。用反证法。若(1.4.8)不成立，则对$\forall n\in\mathbf{N}$，$\exists x_n\in\mathscr{X}$，使得$\|x_n\|_1>n\|x_n\|_2$。令$y_n\triangleq x_n/\|x_n\|_1$。一方面$\|y_n\|_1=1$，另一方面因为

$$0\leqslant\|y_n\|_2<\frac{1}{n}\qquad(\forall n\in\mathbf{N}),$$

所以$\|y_n\|_2\to 0$(当$n\to\infty$)。又因为$\|\cdot\|_2$比$\|\cdot\|_1$强，所以$\|y_n\|_1\to 0$(当$n\to\infty$)。这显然是一个矛盾。

推论1.4.17 为了$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$等价必须且仅须存在常数$C_1,C_2>0$，使得

$$C_1\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant C_2\|x\|_1\qquad(\forall x\in\mathscr{X})。\ \blacksquare$$

如果线性空间$\mathscr{X}$的维数是有穷数n，则记作$\dim\mathscr{X}=n$，否则记为$\dim\mathscr{X}=\infty$。设$\mathscr{X}$是一个线性赋范空间，并且设$\dim\mathscr{X}=n$，这时$\mathscr{X}$存在一组基：$e_1,e_2,\cdots,e_n$。任意一个元素$x\in\mathscr{X}$有下列唯一的表示：

$$x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\cdots+\xi_ne_n。\tag{1.4.9}$$

利用这种表示，我们知道在代数同构意义下，两个有穷维线性空间等价的充要条件是它们有相同的维数。现在我们关心的是两个有穷维线性赋范空间，如果维数相同，那末它们的拓扑之间有什么关系？根据(1.4.9)，每个$x\in\mathscr{X}$唯一地对应着$\mathbf{R}^n$空间中的一点$\xi=Tx\triangleq(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$。自然希望建立$x$在$\mathscr{X}$中的范数$\|x\|$与$Tx$在$\mathbf{R}^n$中的范数

$$|Tx|=|\xi|\triangleq\left(\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

之间的关系。为此，考察函数 $p(\xi)\triangleq\left\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j\right\|$ $(\forall\xi\in\mathbb{R}^n)$。

首先 p 对 ξ 是一致连续的。事实上，$\forall\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$；$\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\in\mathbb{R}^n$，由三角形不等式与 Schwarz 不等式有

$$\begin{aligned}|p(\xi)-p(\eta)|&\leqslant p(\xi-\eta)\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|\,\|e_i\|\\&\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant|\xi-\eta|\left(\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

其次，根据范数的齐次性，对 $\forall\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{\theta\}$ 有

$$p(\xi)=|\xi|\left\|\sum_{j=1}^{n}\frac{|\xi_j|}{|\xi|}e_j\right\|=|\xi|\,p\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right). \tag{1.4.10}$$

注意到 $\mathbb{R}^n$ 的单位球面 $S_1\triangleq\{\xi\in\mathbb{R}^n\mid|\xi|=1\}$是一个紧集，因此 $p(\xi)$在 S_1 上必有非负的最小值 C_1 与最大值 C_2，即有

$$C_1\leqslant p(\xi)\leqslant C_2\qquad(\forall\xi\in S_1).$$

按(1.4.10)便有

$$C_1|\xi|\leqslant p(\xi)\leqslant C_2|\xi|\qquad(\forall\xi\in\mathbb{R}^n). \tag{1.4.11}$$

下面证明其中 $C_1>0$。用反证法，假若 $C_1=0$，那末 $\exists\zeta^*\in S_1$ 满足 $p(\zeta^*)=0$。设$\zeta^*=(\zeta_1^*,\zeta_2^*,\cdots,\zeta_n^*)$，即有

$$\zeta_1^*e_1+\zeta_2^*e_2+\cdots+\zeta_n^*e_n=0. \tag{1.4.12}$$

因为$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是基，所以(1.4.12)蕴含 $\zeta^*=\theta$。这与 $\zeta^*\in S_1$ 矛盾。改写(1.4.11)为

$$c_1|Tx|\leqslant\|x\|\leqslant C_2|Tx|\qquad(\forall x\in\mathscr{X}). \tag{1.4.13}$$

如果我们将$|Tx|$看做是在$\mathscr{X}$空间中引入的另一范数$\|x\|_T$，即 $\|x\|_T\triangleq|Tx|$ $(\forall x\in\mathscr{X})$，那末(1.4.13)表明$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_T$ 是等价的.

以后简称$\|\cdot\|_T$为$\mathscr{X}$的$\mathbb{R}^n$范数．于是n维线性赋范空间的范数与其$\mathbb{R}^n$范数等价．

定理1.4.18 设$\mathscr{X}$是一个有穷维线性空间，若$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$都是$\mathscr{X}$上的范数，则必有正常数c_1与c_2，使得

$$c_1\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant c_2\|x\|_1 \qquad (\forall x\in\mathscr{X}).$$

证 设$\dim\mathscr{X}=n$．因为$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$都与$\mathbb{R}^n$范数等价，所以$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$等价．

注 本定理表明：具有相同维数的两个有穷维线性赋范空间在代数上是同构的，在拓扑上是同胚的．

推论1.4.19 有穷维B^*空间必是B空间．

推论1.4.20 B^*空间上的任意有穷维子空间必是闭子空间．

定义1.4.21 设$P:\mathscr{X}\to\mathbb{R}^1$是线性空间$\mathscr{X}$上的一个函数，若它满足

(1) $P(x+y)\leqslant P(x)+P(y)$ $(\forall x,y\in\mathscr{X})$ (次可加性)；

(2) $P(\lambda x)=\lambda P(x)$ $(\forall \lambda>0,\forall x\in\mathscr{X})$ (正齐次性)，

则称P为$\mathscr{X}$上的一个次线性泛函．

注 如果P还满足$P(x)\geqslant 0(\forall x\in\mathscr{X})$，并且代替(2)的是齐次性：$P(ax)=|a|P(x)(\forall a\in\mathbb{K},\forall x\in\mathscr{X})$，则称$P$是一个半范数或半模．

类似于定理1.4.18的证明，还有

定理1.4.22 设P是有穷维B^*空间$\mathscr{X}$上的一个次线性泛函，如果$P(x)\geqslant 0(\forall x\in\mathscr{X})$，并且$P(x)=0\Longleftrightarrow x=\theta$，则存在正常数$c_1,c_2$，使得

$$c_1\|x\|\leqslant P(x)\leqslant c_2\|x\| \qquad (\forall x\in\mathscr{X}).$$

4.5 应用(最佳逼近问题)

逼近论的一个基本问题是：给定了一组函数$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$和一个函数$f$，用$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$的线性组合去逼近$f$(按某种尺度)，问是否有最佳的逼近存在？例如$f$是$[0,2\pi]$上的一个周期函数，

$\phi_i(x)=\cos ix(i=1,2,\cdots,n)$，用$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi_i$去逼近$f$，求在$L^2[0,2\pi]$意义下的最佳逼近。

提成B^*空间的问题：给定一个B^*空间$\mathscr{X}$，并给定$\mathscr{X}$中的有穷个向量$e_1,e_2,\cdots,e_n$。对于给定的向量$x\in\mathscr{X}$，求一组数$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$，使得

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\right\|=\min_{a\in\mathbb{K}^n}\left\|x-\sum_{i=1}^{n}a_i e_i\right\|,\qquad(1.4.14)$$

其中$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$。

首先要问答：这组数$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$是否存在？当然，不妨设$e_1,e_2,\cdots,e_n$是线性无关的。我们要求函数

$$F(a)=\left\|x-\sum_{i=1}^{n}a_i e_i\right\|\qquad(a\in\mathbb{K}^n)$$

的最小值。容易看出F是$\mathbb{K}^n$上的连续函数。又注意到

$$F(a)\geqslant\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i e_i\right\|-\|x\|\qquad(\forall a\in\mathbb{K}^n).\qquad(1.4.15)$$

令$P(a)\triangleq\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i e_i\right\|$，显然$P(\cdot)$是$\mathbb{K}^n$上的一个模，而$\mathbb{K}^n$是有穷维空间，应用定理1.4.18，$\exists c_1>0$，使得

$$P(a)\geqslant c_1|a|\qquad(\forall a\in\mathbb{K}^n),\qquad(1.4.16)$$

其中

$$|a|\triangleq(|a_1|^2+|a_2|^2+\cdots+|a_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$(\forall a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbb{K}^n).$$

联合(1.4.15)和(1.4.16)推出$F(a)\to\infty$（当$|a|\to\infty$）。于是函数F有最小值存在，这就是

定理1.4.23 设$\mathscr{X}$是一个B^*空间。若$e_1,e_2,\cdots,e_n$是$\mathscr{X}$中给定的向量组，则$\forall x\in\mathscr{X}$，存在着最佳逼近系数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$

适合(1.4.14)。

注 若记 $M \triangleq \text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$; $\rho(x, M) \triangleq \inf_{y \in M} \|x - y\|$;

$x_0 \triangleq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, 则可改写(1.4.14)为

$$\rho(x, x_0) = \rho(x, M)。 \tag{1.4.17}$$

适合(1.4.17)的 $x_0 \in M$ 称为 x 在 M 上的最佳逼近元。本定理表明: 在 B^* 空间中, 任一指定元素在给定的有限维子空间上的最佳逼近元总是存在的。

进一步问: 最佳逼近元是不是唯一的? 显然我们事先要假设给定的向量组 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是线性无关的, 但即使如此, 唯一性还依赖于 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 的模的性质.

定义1.4.24 B^* 空间 $(\mathscr{X}, \|\cdot\|)$ 称为严格凸的, 是指 $\forall x, y \in \mathscr{X}$, $x \neq y$ 必有

$$\|x\| = \|y\| = 1 \Longrightarrow \|\alpha x + \beta y\| < 1 \quad (\forall \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1)。 \tag{1.4.18}$$

如果 $\mathscr{X}$ 是严格凸的 B^* 空间, 那末就不能有两个不同的最佳逼近元。事实上, 倘若 $d \triangleq \rho(x, M) > 0$, 并有 $\|x - y\| = \|x - z\| = d$, 则对 $\forall \alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, 由严格凸性有

$$\frac{1}{d}\|x - (\alpha y + \beta z)\| = \frac{1}{d}\|\alpha(x - y) + \beta(x - z)\|$$

$$= \left\|\alpha\left(\frac{x - y}{d}\right) + \beta\left(\frac{x - z}{d}\right)\right\| < 1,$$

即 $\|x - (\alpha y + \beta z)\| < d$。这显然与 d 的定义矛盾。但若 $d = 0$, y 是相应的最佳逼近元, 则必有 $\|x - y\| = 0$, 即 $y = x$。从而最佳逼近元必是唯一的。这就是

定理1.4.25 设 $\mathscr{X}$ 是严格凸的 B^* 空间, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 $\mathscr{X}$ 上给定的一组线性无关向量, 则 $\forall x \in \mathscr{X}$, 存在着唯一的一组最佳逼近系数 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ 适合(1.4.14)。

例1.4.26 空间 $L^p(\Omega,\mu)(1<p<\infty)$ 是严格凸的。

证 因为 Minkowski 不等式 $\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\|$ 等号成立的充要条件是：$\exists k_1,k_2\geqslant 0(k_1+k_2>0)$，使得 $k_1u=k_2v$(p.p.)。这意味着 $\forall u,v\in L^p(\Omega,\mu)$，当 $\|u\|=\|v\|=1$，$u\neq v$ 时，

$$\|tu+(1-t)v\|<t\|u\|+(1-t)\|v\|=1 \quad (\forall\, 0<t<1).$$

即 $L^p(\Omega,\mu)$ 是严格凸的。

例1.4.27 $C(M)$ 及 $L^1(\Omega,\mu)$ 都不是严格凸的。

以 $C[0,1]$ 为例。取 $x(t)\equiv 1, y(t)=t$，都满足 $\|x\|=\|y\|=1$，但 $\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|=1$。

以 $L^1[0,1]$ 为例。取 $x(t)\equiv 1, y(t)=2t$，都满足 $\|x\|=\|y\|=1$，但 $\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|=1$。 ▌

有了存在唯一性以后，最佳逼近的计算方法化归求一凸函数的极小值（见习题1.4.12）。数值最优化技术给这类问题提供许多具体的算法。

4.6 有穷维 B*空间的刻划

我们已经知道有穷维 B^*空间上的单位球面

$$S_1\triangleq\{x\in\mathscr{X}\mid\|x\|=1\}$$

是列紧的，现在来证明反过来：如果一个 B^*空间$\mathscr{X}$的单位球面是列紧的，那末这空间必是有穷维的。事实上，倘若在 S_1上给定了有穷个线性无关的向量$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，如果它们的线性包 M_n 张不满$\mathscr{X}$，那末 $\exists x_{n+1}\in S_1$，使得

$$\|x_{n+1}-x_i\|\geqslant 1 \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

这是因为任取 $y\in M_n$，按定理1.4.23，$\exists x\in M_n$，使得

$$\|y-x\|=d\triangleq\rho(y,M_n).$$

令 $x_{n+1}\triangleq(y-x)/d$，显然 $x_{n+1}\in S_1$，并且

$$\|x_{n+1}-x_i\|=\frac{1}{d}\|y-(x+dx_i)\|\geqslant\frac{1}{d}d=1 \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

照此办法，如果$\mathscr{X}$是无穷维的，我们便可以逐次在S_1上抽选出一串$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$适合$\|x_n-x_m\|\geqslant 1(n,m\in\mathbb{N},n\neq m)$。这样$S_1$就不是列紧的。于是我们得到

定理1.4.28 为了B^*空间$\mathscr{X}$是有穷维的，必须且仅须$\mathscr{X}$的单位球面是列紧的。

定义1.4.29 B^*空间$\mathscr{X}$上的一个子集A称为是有界的，如果存在常数$c>0$，使得$\|x\|\leqslant c(\forall x\in A)$。

推论1.4.30 为了B^*空间$\mathscr{X}$是有穷维的，必须且仅须其任意有界集是列紧的。 ▌

上述方法被F.Riesz用来导出如下非常有用的引理。

引理1.4.31(F.Riesz引理) 如果$\mathscr{X}_0$是B^*空间$\mathscr{X}$的一个真闭子空间，那末对$\forall\, 0<\varepsilon<1$，$\exists y\in\mathscr{X}$，使得$\|y\|=1$，并且$\|y-x\|\geqslant 1-\varepsilon(\forall x\in\mathscr{X}_0)$。

证 任取$y_0\in\mathscr{X}\backslash\mathscr{X}_0$。因为$\mathscr{X}_0$是闭的，所以

$$d\triangleq\inf_{x\in\mathscr{X}_0}\|y_0-x\|>0.$$

因此，$\forall\eta>0$，$\exists x_0\in\mathscr{X}_0$使得$d\leqslant\|y_0-x_0\|<d+\eta$（参看图1.4.1）。

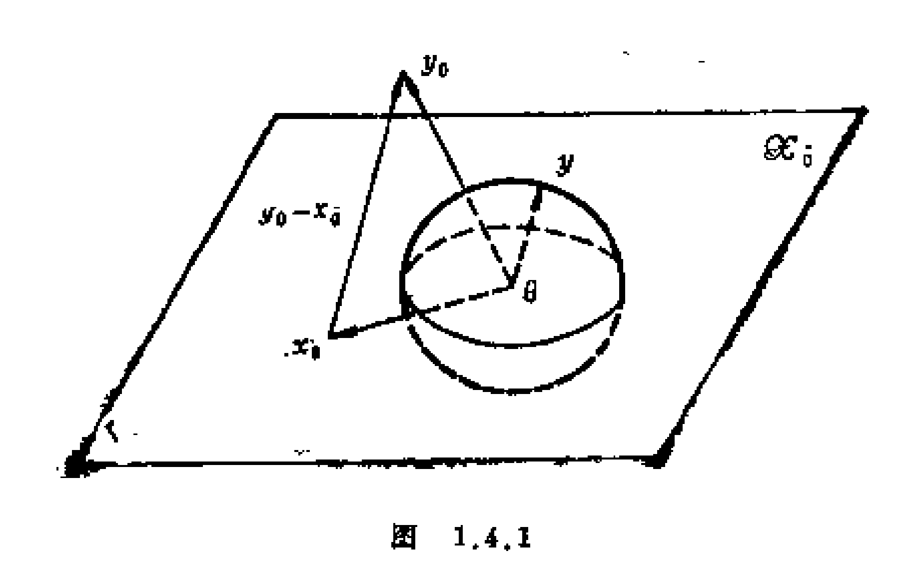


图 1.4.1

若$y\triangleq(y_0-x_0)/\|y_0-x_0\|$，则$\|y\|=1$，并且对$\forall x\in\mathscr{X}_0$有

$$\|y-x\|=\frac{\|y_0-x'\|}{\|y_0-x_0\|}>\frac{d}{d+\eta}=1-\frac{\eta}{d+\eta}, \qquad (1.4.19)$$

其中 $x'=x_0+\|y_0-x_0\|x\in\mathscr{X}_0$。于是对 $\forall\, 0<\varepsilon<1$，只要 $\eta=d\varepsilon/1-\varepsilon$，便得到 $\|y-x\|>1-\varepsilon$。

习　题

1.4.1　在二维空间 $\mathbf{R}^2$ 中，对每一点 $z=(x,y)$，令

$$\|z\|_1=|x|+|y|; \qquad \|z\|_2=\sqrt{x^2+y^2};$$

$$\|z\|_3=\max(|x|,|y|); \qquad \|z\|_4=(x^4+y^4)^{\frac{1}{4}}.$$

(1) 求证 $\|\cdot\|_i(i=1,2,3,4)$ 都是 $\mathbf{R}^2$ 的范数。

(2) 画出 $(\mathbf{R}^2,\|\cdot\|_i)(i=1,2,3,4)$ 各空间中的单位球面图形。

(3) 在 $\mathbf{R}^2$ 中取定三点 $O=(0,0)$, $A=(1,0)$, $B=(0,1)$，试在上述四种不同范数下求出 $\triangle OAB$ 三边的长度。

1.4.2　设 $c(0,1]$ 表示 $(0,1]$ 上连续且有界的函数 $x(t)$ 全体。对 $\forall\, x\in c(0,1]$，令 $\|x\|=\sup\limits_{0<t\leq 1}|x(t)|$。求证：

(1) $\|\cdot\|$ 是 $c(0,1]$ 空间上的范数；

(2) l^∞ 与 $c(0,1]$ 的一个子空间是等距同构的。

1.4.3　在 $C^1[a,b]$ 中，令

$$\|f\|_1=\left(\int_a^b(|f|^2+|f'|^2)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (\forall\, f\in C^1[a,b]),$$

(1) 求证 $\|\cdot\|_1$ 是 $C^1[a,b]$ 上的范数。

(2) 问 $(C^1[a,b],\|\cdot\|_1)$ 是否完备？

1.4.4　在 $C[0,1]$ 中，对每一个 $f\in C[0,1]$，令

$$\|f\|_1=\left(\int_0^1|f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \|f\|_2=\left(\int_0^1(1+x)|f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

求证：$\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 $C[0,1]$ 中的两个等价范数。

1.4.5　设$BC[0,\infty)$表示$[0,\infty)$上连续且有界的函数$f(x)$全体，对于每个$f\in BC[0,\infty)$及$a>0$，定义

$$\|f\|_a=\left(\int_0^\infty e^{-ax}|f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(1) 求证$\|\cdot\|_a$是$BC[0,\infty)$上的范数。

(2) 若$a,b>0$，$a\neq b$，求证$\|\cdot\|_a$与$\|\cdot\|_b$作为$BC[0,\infty)$上的范数是不等价的。

1.4.6　设$\mathscr{X}_1,\mathscr{X}_2$是两个$B^*$空间，$x_1\in\mathscr{X}_1$和$x_2\in\mathscr{X}_2$的序对$(x_1,x_2)$全体构成空间$\mathscr{X}=\mathscr{X}_1\times\mathscr{X}_2$，并赋以范数

$$\|x\|=\max(\|x_1\|_1,\|x_2\|_2),$$

其中$x=(x_1,x_2),x_1\in\mathscr{X}_1,x_2\in\mathscr{X}_2,\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$分别是$\mathscr{X}_1$和$\mathscr{X}_2$的范数。求证：如果$\mathscr{X}_1,\mathscr{X}_2$是$B$空间，那末$\mathscr{X}$也是$B$空间。

1.4.7　设$\mathscr{X}$是B^*空间。求证：$\mathscr{X}$是B空间，必须且仅须对$\forall\{x_n\}\subset\mathscr{X}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty\Longrightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛。

1.4.8　记$[a,b]$上次数不超过n的多项式全体为$\mathbf{P}_n$。求证：$\forall f(x)\in C[a,b],\exists P_0(x)\in\mathbf{P}_n$，使得

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P_0(x)|=\min_{P\in\mathbf{P}_n}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P(x)|.$$

也就是说，如果用所有次数不超过n的多项式去对$f(x)$一致逼近，那末$P_0(x)$是最佳的。

1.4.9　在$\mathbb{R}^2$中，对$\forall x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$，定义范数

$$\|x\|=\max(|x_1|,|x_2|),$$

并设$e_1=(1,0),x_0=(0,1)$。求$a\in\mathbb{R}^1$适合

$$\|x_0-ae_1\|=\min_{\lambda\in\mathbb{R}^1}\|x_0-\lambda e_1\|,$$

并问这样的a是否唯一？请对结果作出几何解释。

1.4.10　求证范数的严格凸性等价于下列条件：

$\|x+y\|=\|x\|+\|y\|(\forall x\neq\theta,y\neq\theta)\Longrightarrow x=cy\quad(c>0)$。

1.4.11 设$\mathscr{X}$是线性赋范空间，函数$\varphi:\mathscr{X}\to\mathbf{R}^1$称为凸的，如果不等式

$$\varphi(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y)\quad(\forall\, 0\leqslant\lambda\leqslant 1)$$

成立。求证凸函数的局部极小值必然是全空间最小值。

1.4.12 设$(\mathscr{X},\|\cdot\|)$是一线性赋范空间，M是$\mathscr{X}$的有限维子空间，$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是M的一组基，给定$g\in\mathscr{X}$，引进函数F：$\mathbf{K}^n\to\mathbf{R}^1$，对$\forall c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in\mathbf{K}^n$规定

$$F(c)=F(c_1,c_2,\cdots,c_n)=\left\|\sum_{i=1}^{n}c_ie_i-g\right\|.$$

(1) 求证F是一个凸函数；

(2) 若$F(c)$的最小值点是$c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，求证

$$f\triangleq\sum_{i=1}^{n}c_ie_i$$

给出g在M中的最佳逼近元。

1.4.13 设$\mathscr{X}$是B^*空间，$\mathscr{X}_0$是$\mathscr{X}$的线性子空间，假定$\exists\, c\in(0,1)$，使得

$$\inf_{x\in\mathscr{X}_0}\|y-x\|\leqslant c\|y\|\qquad(\forall\, y\in\mathscr{X}).$$

求证：$\mathscr{X}_0$在$\mathscr{X}$中稠密。

1.4.14 设C_0表示以0为极限的实数全体，并在C_0中赋以范数

$$\|x\|=\max_{n\geqslant 1}|\xi_n|\qquad(\forall\, x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in C_0).$$

又设$M\triangleq\left\{x=\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\in C_0\,\middle|\,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n}{2^n}=0\right\}$.

(1) 求证：M是C_0的闭线性子空间。

(2) 设$x_0=(2,0,\cdots,0,\cdots)$，求证：

$$\inf_{Z\in M}\|x_0-Z\|=1,$$

但 $\forall y\in M$ 有 $\|x_0-y\|>1$。

注 本题提供一个例子说明：对于无穷维闭线性子空间来说，给定其外一点 x_0，未必能在其上找到一点 y 适合

$$\|x_0-y\|=\inf_{z\in M}\|x_0-Z\|.$$

换句话说，给定 $x_0\bar{\in}M$，未必能在 M 上找到最佳逼近元。

1.4.15 设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间，M 是 $\mathscr{X}$ 的有限维真子空间，求证 $\exists y\in\mathscr{X}$，$\|y\|=1$，使得

$$\|y-x\|\geqslant 1\qquad(\forall x\in M).$$

1.4.16 若 f 是定义在区间 $[0,1]$ 上的复值函数，定义

$$\omega_\delta(f)=\sup\{|f(x)-f(y)|\,|\,\forall x,y\in[0,1],|x-y|\leqslant\delta\}.$$

如果 $0<\alpha\leqslant 1$ 对应的 Lipschitz 空间 $\mathrm{Lip}\alpha$，由满足

$$\|f\|\triangleq|f(0)|+\sup_{\delta>0}\{\delta^{-\alpha}\omega_\delta(f)\}<\infty$$

的一切 f 组成，并以 $\|f\|$ 为模。又设

$$\mathrm{lip}\alpha\triangleq\left\{f\in\mathrm{Lip}\alpha\,\middle|\,\lim_{\delta\to 0}\delta^{-\alpha}\omega_\delta(f)=0\right\}.$$

求证 $\mathrm{Lip}\alpha$ 是 B 空间，而且 $\mathrm{lip}\alpha$ 是 $\mathrm{Lip}\alpha$ 的闭子空间。

1.4.17（商空间） 设 $\mathscr{X}$ 是线性赋范空间，$\mathscr{X}_0$ 是 $\mathscr{X}$ 的闭线性子空间，将 $\mathscr{X}$ 中的向量分类，凡是适合 $x'-x''\in\mathscr{X}_0$ 的两个向量 $x',x''(\in\mathscr{X})$ 归于同一类，称其为等价类。把一个等价类看成一个新的向量，这种向量的全体组成的集合用 $\mathscr{X}/\mathscr{X}_0$ 表示，并称其为商空间。下列是关于商空间的命题。

(1) 设 $[x]\in\mathscr{X}/\mathscr{X}_0$，$x\in\mathscr{X}$，求证：$x\in[x]$ 的充分且必要条件是 $[x]=x+\mathscr{X}_0$。

(2) 在 $\mathscr{X}/\mathscr{X}_0$ 中定义加法与数乘如下：

$$[x]+[y]\triangleq x+y+\mathscr{X}_0\qquad(\forall[x],[y]\in\mathscr{X}/\mathscr{X}_0);$$

$$\lambda[x]\triangleq\lambda x+\mathscr{X}_0\qquad(\forall[x]\in\mathscr{X}/\mathscr{X}_0,\forall\lambda\in\mathbf{K}),$$

其中 x 和 y 分别表示属于等价类 $[x]$ 和 $[y]$ 的任一元素。又规定

范数

$$\|[x]\|_0=\inf_{x\in[x]}\|x\| \qquad (\forall [x]\in\mathscr{X}/\mathscr{X}_0),$$

求证$(\mathscr{X}/\mathscr{X}_0,\|\cdot\|_0)$是一个$B^*$空间。

(3) 设$[x]\in\mathscr{X}/\mathscr{X}_0$,求证对$\forall x\in[x]$有

$$\inf_{Z\in\mathscr{X}_0}\|x-Z\|=\|[x]\|_0.$$

(4) 定义映射$\varphi:\mathscr{X}\to\mathscr{X}/\mathscr{X}_0$为

$$\varphi(x)=[x]\triangleq x+\mathscr{X}_0 \qquad (\forall x\in\mathscr{X}),$$

求证φ是线性连续映射。

(5) $\forall [x]\in\mathscr{X}/\mathscr{X}_0$, 求证$\exists x\in\mathscr{X}$, 使得

$$\varphi(x)=[x], \quad 且 \quad \|x\|\leqslant 2\|[x]\|_0.$$

(6) 设$(\mathscr{X},\|\cdot\|)$完备, 求证$(\mathscr{X}/\mathscr{X}_0,\|\cdot\|_0)$也是完备的。

(7) 设$\mathscr{X}=C[0,1]$,$\mathscr{X}_0=\{f\in\mathscr{X}\,|\,f(0)=0\}$, 求证:

$$\mathscr{X}/\mathscr{X}_0\cong\mathbb{C},$$

其中记号"$\cong$"表示等距同构。

§5 凸集与不动点

5.1 定义与基本性质

一般线性空间中的凸集概念是从平面凸集的特征性质中抽象出来的。这性质是：若E是一个平面凸集，则对于E中任意两点x,y,联结这两点的线段也在E内，即

$$\lambda x+(1-\lambda)y\in E \qquad (\forall x,y\in E,\ \forall\, 0\leqslant\lambda\leqslant 1).$$

这个性质并不要求空间具有拓扑结构，所以这个概念可以扩充到一般的线性空间。

定义1.5.1 设$\mathscr{X}$是线性空间，$E\subset\mathscr{X}$，称E为一凸集，如果

$$\lambda x+(1-\lambda)y\in E \qquad (\forall x,y\in E,\ \forall\, 0\leqslant\lambda\leqslant 1).$$

下面命题可从定义直接推出。

命题1.5.2 若$\{E_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$是线性空间$\mathscr{X}$中的一族凸集，则

$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ 也是凸集。

定义1.5.3 设$\mathscr{X}$是线性空间，$A\subset\mathscr{X}$。若$\{E_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$为$\mathscr{X}$中包含$A$的一切凸集，那么称$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$为$A$的凸包，并记作$\mathrm{co}(A)$。

又对$\forall n\in\mathbf{N}, x_1,x_2,\cdots,x_n\in A$，称$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$为$x_1,x_2,\cdots,x_n$的凸组合，是指其中系数满足$\lambda_i\geqslant 0, \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$。

命题1.5.4 设$\mathscr{X}$是线性空间，$A\subset\mathscr{X}$，那末A的凸包是A中元素任意凸组合的全体。即

$$\mathrm{co}(A)=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1,\ \lambda_i\geqslant 0, x_i\in A, i=1,2,\cdots,n, \forall n\in\mathbf{N}\right\}. \tag{1.5.1}$$

证 若令S表示(1.5.1)式右端，则$A\subset S$而且S是凸集，从而$S\supset\mathrm{co}(A)$。反之，设F为包含A的任一凸集，那末$x_i\in F$ $(i=1,2,\cdots,n)$，从而$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\in F$，即得$S\subset F$，从而$S\subset\mathrm{co}(A)$。

定义1.5.5 设$\mathscr{X}$是线性空间，C是$\mathscr{X}$上含有θ的凸子集，在$\mathscr{X}$上规定一个取值于$[0,\infty]$的函数

$$P(x)=\inf\left\{\lambda>0 \,\middle|\, \frac{x}{\lambda}\in C\right\} \quad (\forall x\in\mathscr{X}) \tag{1.5.2}$$

与C对应，称函数P为C的 Minkowski 泛函。

命题1.5.6 设$\mathscr{X}$是线性空间，C是$\mathscr{X}$上含有θ的凸子集。若P为C的 Minkowski 泛函，则P具有下列性质：

(1) $P(x)\in[0,\infty], P(\theta)=0$；

(2) $P(\lambda x)=\lambda P(x)$ $(\forall x\in\mathscr{X}, \forall\lambda>0)$（正齐次性）；

(3) $P(x+y)\leqslant P(x)+P(y)$ $(\forall x,y\in\mathscr{X})$（次可加性）。

证 只有(3)是需要验证的。不妨设 $P(x)$,$P(y)$有穷，对 $\forall\varepsilon>0$,取 $\lambda_1=P(x)+\varepsilon/2$, $\lambda_2=P(y)+\varepsilon/2$，则有

$$\frac{x}{\lambda_1}\in C,\qquad \frac{y}{\lambda_2}\in C.$$

因为 C 是凸的，所以

$$\frac{x+y}{\lambda_1+\lambda_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\cdot\frac{x}{\lambda_1}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\cdot\frac{y}{\lambda_2}\in C.$$

这表明

$$P(x+y)\leqslant\lambda_1+\lambda_2=P(x)+P(y)+\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$的任意性得到(3)。 ▌

何时 $P(x)$是真正的函数，即不取∞？又何时正齐次性成为齐次性？为了回答这些问题我们引进如下的概念。

定义1.5.7 线性空间$\mathscr{X}$中，含有 θ 的凸集C称为是**吸收的**，如果$\forall x\in\mathscr{X}$，$\exists\lambda>0$，使得 $x/\lambda\in C$；称C是**对称的**，如果 $x\in C\Rightarrow -x\in C$。

图1.5.1显示平面上吸收凸集和对称凸集的图形。

根据定义显然有

命题1.5.8 为了C是吸收凸集，必须且仅须其 Minkowski 泛函 $P(x)$是实值函数；为了C是对称凸集，必须且仅须$P(x)$是实齐次的，即

$$P(ax)=|a|P(x)\qquad(\forall a\in\mathbb{R}^1).$$

对于复数域线性空间上的凸集，代替对称性，我们引进均衡性的概念。

定义1.5.9 复线性空间$\mathscr{X}$的一个子集C称为是均衡的是指

$$x\in C\Rightarrow ax\in C\qquad(\forall a\in\mathbb{C},|a|=1).$$

结合半模定义(见1.4.21的注)我们有

命题1.5.10 复线性空间$\mathscr{X}$上的任一个均衡吸收凸集C，决定了这空间上的一个半模。

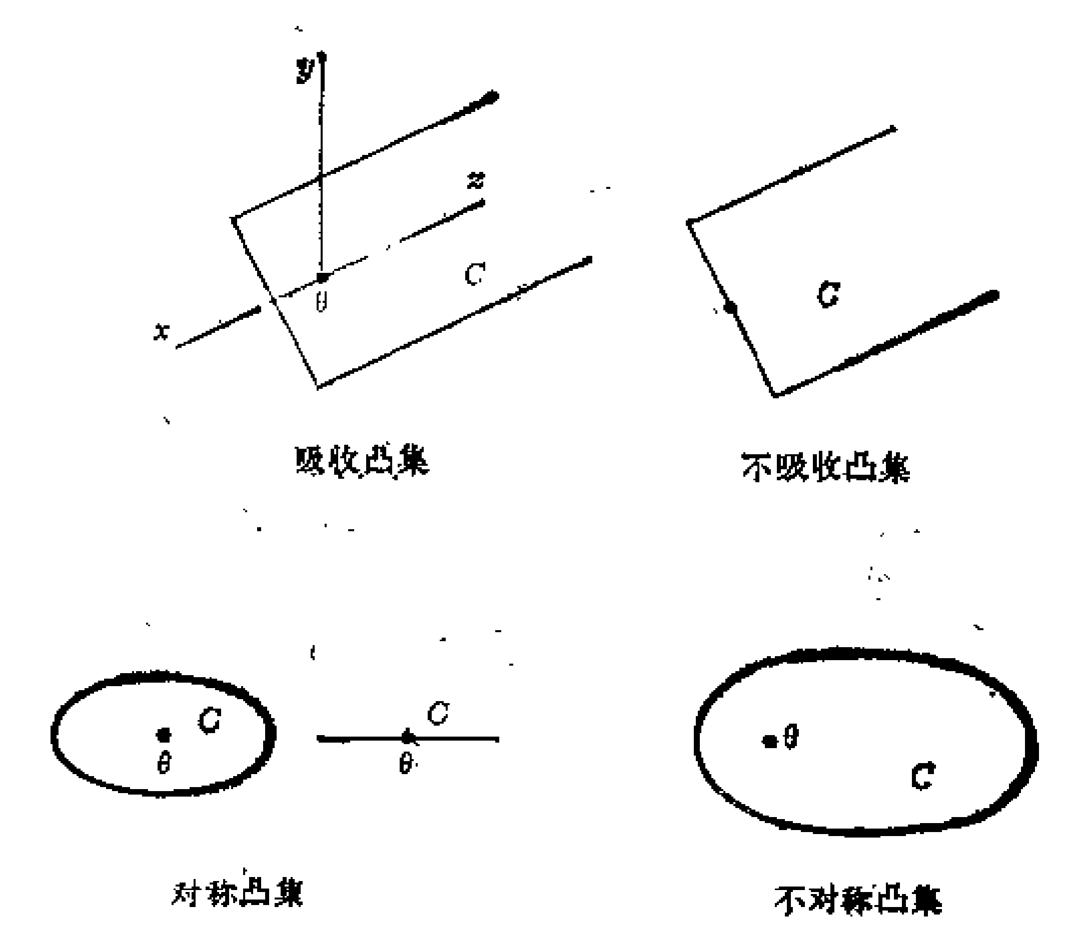


图 1.5.1

对于线性赋范空间$\mathscr{X}$，我们有更强的结果：

命题1.5.11 设$\mathscr{X}$是一个B^*空间，C是一个含有θ点的闭凸集。如果$P(x)$是C的Minkowski泛函，那末$P(x)$下半连续，且有

$$C=\{x\in\mathscr{X}\mid P(x)\leqslant 1\}. \tag{1.5.3}$$

此外，如果C还是有界的，那末$P(x)$适合

$$P(x)=0\Longleftrightarrow x=\theta.$$

又若C以θ为一内点，那末C是吸收的，并且$P(x)$还是一致连续的。

证 (1) $\forall a>0$，若$x\in aC$，即$x/a\in C$，由$P(x)$的定义便有$P(x)\leqslant a$；反之，若$P(x)\leqslant a$，则对$\forall n\in\mathbf{N}$有

$$\frac{x}{a+\frac{1}{n}}\in C,\qquad \frac{x}{a+\frac{1}{n}}\to\frac{x}{a}\qquad (当 n\to\infty),$$

又因为C是闭的，所以$x\in aC$。这就证得

$$aC=\{x\in\mathscr{X}\mid P(x)\leqslant a\}\qquad(\forall a>0).\qquad(1.5.4)$$

特别地，令$a=1$即得(1.5.3)。又因为$\forall a>0$，aC是闭集，所以P是下半连续的。

(2) 因为$\theta\in C$，所以$P(\theta)=0$是显然的。在C有界假定下，即$\exists r>0$，使得$C\subset B(\theta,r)$，于是

$$\forall x\in\mathscr{X}\backslash\{\theta\}\Rightarrow\frac{rx}{\|x\|}\overline{\in} C\Rightarrow P(x)\geqslant\frac{\|x\|}{r}.$$

由此可见当$P(x)=0$时，$x=\theta$。

(3) 若C以θ为内点，即$\exists r>0$，使得$B(\theta,r)\subset C$，那末

$$\frac{rx}{2\|x\|}\in C\qquad(\forall x\in\mathscr{X}\backslash\{\theta\}).$$

因此C是吸收的，并且有$P(x)\leqslant 2\|x\|/r(\forall x\in\mathscr{X})$。于是

$$|P(x)-P(y)|\leqslant\max(P(x-y),P(y-x))\leqslant\frac{2}{r}\|x-y\|$$
$$(\forall x,y\in\mathscr{X}),$$

从而$P(x)$是一致连续的。

推论1.5.12 若C是$\mathbf{R}^n$中的一个紧凸子集，则必存在正整数$m\leqslant n$，使得C同胚于$\mathbf{R}^m$中的单位球。

证 (1) 用E表示包含C的最小闭线性子流形。设其维数是$m(\leqslant n)$。于是在C上必有$m+1$个向量$e_1,e_2,\cdots,e_m,e_{m+1}$，使得$e_i-e_{m+1}(i=1,2,\cdots,m)$是线性无关的。

(2) 令
$$e_0=\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m+1}e_i.$$

因为$e_0\in C\subset E$，所以$E-e_0$是一个m维线性子空间。于是对

$\forall y \in E$，存在唯一的表示

$$y=\sum_{i=1}^{m}\mu_i(e_i-e_0)+e_0, \tag{1.5.5}$$

并在 $E-e_0$ 上可引进一个等价模

$$\|z\|=\left(\sum_{i=1}^{m}|\mu_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (z=y-e_0,\ y\in E). \tag{1.5.6}$$

(3) 我们要证：当(1.5.6)所表示的 $\|z\|$ 足够小时，蕴含(1.5.5)所表示的 $y\in C$。事实上，因为

$$\begin{aligned} y&=\sum_{i=1}^{m}\mu_i e_i+\left(1-\sum_{j=1}^{m}\mu_j\right)e_0\\ &=\sum_{i=1}^{m}\left\{\mu_i+\frac{1}{m+1}\left(1-\sum_{j=1}^{m}\mu_j\right)\right\}e_i+\frac{1}{m+1}\left(1-\sum_{j=1}^{m}\mu_j\right)e_{m+1}, \end{aligned} \tag{1.5.7}$$

当 $|\mu_j|\ (j=1,2,\cdots,m)$ 足够小时，(1.5.7)右端各项系数都是正的，并且各项系数的总和

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{\mu_i+\frac{1}{m+1}\left(1-\sum_{j=1}^{m}\mu_j\right)\right\}+\frac{1}{m+1}\left(1-\sum_{j=1}^{m}\mu_j\right)=1,$$

所以 $y\in \mathrm{co}\{e_1,e_2,\cdots,e_m,e_{m+1}\}\subset C$。

(4) 在 $E-e_0$ 上，$C-e_0$ 是一个以 θ 为内点的有界闭凸集，它的 Minkowski 泛函 $P(z)$ 是在 $E-e_0$ 上的一个一致连续、正齐次、次可加泛函，适合 $P(z)=0 \Longleftrightarrow z=\theta$。应用定理1.4.22，$\exists\, c_1,c_2>0$，使得

$$c_1\|z\|\leqslant P(z)\leqslant c_2\|z\| \qquad (\forall z\in E-e_0).$$

设 $B^m(\theta,1)$ 是 $E-e_0$ 中的单位球，若令

$$\varphi(z)=e_0+\begin{cases}\|z\|z/P(z) & (z\neq\theta),\\ 0 & (z=\theta),\end{cases}$$

则 $\varphi: B^m(\theta,1)\to C$ 是一个在上同胚。

5.2 Brouwer 与 Schauder 不动点定理

在拓扑学中有一个重要的属于 Brouwer 的不动点定理，引用如下：

定理1.5.13(Brouwer)[①] 设B是$\mathbf{R}^n$中的闭单位球，又设$T:B\to B$是一个连续映射，那末T必有一个不动点$x\in B$

联合推论1.5.12与 Brouwer 定理，有

推论1.5.14 设C是$\mathbf{R}^n$中的一个紧凸子集，$T:C\to C$是连续的，则T必有一个在C上的不动点。

证 由于C与$\mathbf{R}^m(m\leqslant n)$中的一个单位球同胚，记此同胚为$\varphi:B^m(\theta,1)\to C$。考察映射

$$T_\varphi=\varphi^{-1}\circ T\circ\varphi.$$

显然$T_\varphi:B^m(\theta,1)\to B^m(\theta,1)$。对$T_\varphi$应用Brouwer不动点定理，存在$x\in B^m(\theta,1)$使得$T_\varphi x=x$.由此得到$y=\varphi x\in C$是$T$的不动点。▌

现在我们把有穷维空间的不动点定理推广到无穷维空间中去。

定理1.5.15(Schauder) 设C是B^*空间$\mathscr{X}$中的一个闭凸子集，$T:C\to C$连续且$T(C)$列紧，则T在C上必有一个不动点。

证 (1) 因为$T(C)$是列紧集，所以对$\forall n\in\mathbf{N}$，存在$1/n$网$N_n=\{y_1,y_2,\cdots,y_{r_n}\}$，即

$$T(C)\subset\bigcup_{i=1}^{r_n}B\left(y_i,\ \frac{1}{n}\right)\quad(y_i\in T(C),\ i=1,2,\cdots,r_n).$$

记$E_n=\operatorname{span}\{N_n\}$,即$E_n$为由$N_n$张成的有穷维线性子空间。

(2) 作$T(C)\to\operatorname{co}(N_n)$的映射$I_n$如下：

---

① 这个定理的证明有好多个。除了代数拓扑的证明而外，还有几个初等的、纯分析的证明，例如参看 J.Milnor, Analytic proofs of the "hairy ball theorem" and the Brouwer fixed point theorem, *Amer. Math. Monthly*, Vol. 85 No.7 (1978), 521—524. J.Franklin, Methods of Mathematical economics, p.232—246, Springer Verlag.

$$I_n(y)=\sum_{i=1}^{r_n} y_i\lambda_i(y) \qquad (\forall y\in T(C)), \tag{1.5.8}$$

其中

$$\lambda_i(y)=\frac{m_i(y)}{\sum_{i=1}^{r_n} m_i(y)}, \quad m_i(y)=\begin{cases}1-n\|y-y_i\| & \left(y\in B\left(y_i,\frac{1}{n}\right)\right);\\ 0 & \left(y\overline{\in} B\left(y_i,\frac{1}{n}\right)\right).\end{cases}$$

因为 $m_i(y)\geqslant 0$，并且 $\forall y\in T(C)$，$\exists i_0(1\leqslant i_0\leqslant r_n)$，使得

$$y\in B\left(y_{i_0},\frac{1}{n}\right), \text{ 于是 } \quad m_{i_0}(y)>0,$$

所以 $\sum_{i=1}^{r_n} m_i(y)>0(\forall y\in T(C))$。因此，$\lambda_i(y)(1\leqslant i\leqslant r_n)$有定义并满足

$$\lambda_i(y)\geqslant 0(1\leqslant i\leqslant r_n), \quad \sum_{i=1}^{r_n}\lambda_i(y)=1. \tag{1.5.9}$$

于是 I_n 在 $T(C)$ 上有定义，并且(1.5.8)与(1.5.9)蕴含 $I_n(y)$是 N_n 元素的凸组合，从而 $I_n(y)\in \text{co}(N_n)$。此外还有

$$\begin{aligned}\|I_n y-y\| &= \left\|\sum_{i=1}^{r_n} y_i\lambda_i(y)-\sum_{i=1}^{r_n} y\lambda_i(y)\right\|\\ &=\left\|\sum_{i=1}^{r_n}(y_i-y)\lambda_i(y)\right\|\leqslant\sum_{i=1}^{r_n}\|y_i-y\|\lambda_i(y)\\ &=\sum_{y\in B\left(y_i,\frac{1}{n}\right)}\|y_i-y\|\lambda_i(y)+\sum_{y\overline{\in} B\left(y_i,\frac{1}{n}\right)}\|y_i-y\|\lambda_i(y)\\ &<\frac{1}{n}+0=\frac{1}{n}.\end{aligned} \tag{1.5.10}$$

(3) 注意到 $T:C\to C, N_n\subset T(C)$，而 C 是凸的，所以 $\text{co}(N_n)$

$\subset C$。令 $T_n \triangleq I_n \circ T$，那末 $T_n:\mathrm{co}(N_n)\to\mathrm{co}(N_n)$。又注意到 co (N_n) 是 E_n 中的一个有界闭凸子集，应用推论1.5.14，$\exists x_n\in$ co $(N_n)\subset C$，使得

$$T_n x_n = x_n. \tag{1.5.11}$$

又因为 $T(C)$ 是列紧集而 C 是闭集，所以存在子列 n_k 及 $x\in C$ 使得

$$Tx_{n_k}\to x \qquad (k\to\infty). \tag{1.5.12}$$

联合(1.5.10)与(1.5.11)得到

$$\begin{aligned}\|x_n - x\| &= \|T_n x_n - x\|\\ &= \|I_n T x_n - T x_n + T x_n - x\|\\ &\leqslant \|I_n T x_n - T x_n\| + \|T x_n - x\|\\ &< \frac{1}{n} + \|T x_n - x\| \quad (\forall n\in\mathbf{N}).\end{aligned} \tag{1.5.13}$$

联合(1.5.12)与(1.5.13)即得 $x_{n_k}\to x(k\to\infty)$，再利用 T 的连续性和(1.5.12)即得

$$Tx = x.$$

定义1.5.16 设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间，E 是 $\mathscr{X}$ 的一个子集，映射 T：$E\to\mathscr{X}$，称它是紧的，如果它是连续的并且映 E 中的任意有界集为 $\mathscr{X}$ 中的列紧集。

推论1.5.17 设 C 为 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 中的一个有界闭凸子集，T：$C\to C$ 是紧的，则 T 在 C 上必有不动点。

5.3 *应用*

再考察常微分方程初值问题的存在性定理。现在只假设函数

$$f(t,x):\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1,$$

在 $[-h,h]\times[\xi-b,\xi+b]$ 上二元连续(从而有常数 $M>0$，使得 $|f(t,x)|\leqslant M$)。考察 $C[-h,h]$ 中的球 $B(\xi,b)$ 上的映射：

$$(Tx)(t) = \xi + \int_0^t f(\tau, x(\tau))d\tau.$$

我们来证明：对足够小的 h，T 映 $\bar{B}(\xi,b)$ 到自身，并且 T 是紧的。事实上

$$\|Tx-\xi\|_{C[-h,h]}\leqslant Mh \qquad (\forall x\in \bar{B}(\xi,b)),$$

故当 $h\leqslant b/M$ 时，T 映 $\bar{B}(\xi,b)$ 到自身。又因为

$$|(Tx)(t)-(Tx)(t')|=\left|\int_{t'}^{t} f(\tau,x(\tau))d\tau\right|$$
$$\leqslant M|t-t'| \quad (\forall t,t'\in[-h,h]),$$
$$|(Tx)(t)|\leqslant|\xi|+Mh \qquad (\forall t\in[-h,h]),$$

所以 T 连续，并根据 Arzela-Ascoli 定理(见定理 1.3.15)，$\bar{B}(\xi,b)$ 在 T 映射下的象是列紧的。应用 Schauder 不动点定理，立得

定理1.5.18(Caratheodory) 假设函数 $f(t,x)$ 在 $[-h,h]\times[\xi-b,\xi+b]$ 上二元连续，$|f(t,x)|\leqslant M$，那末当 $h<b/M$ 时，方程的初值问题

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=f(t,x(t)), \\ x(0)=\xi, \end{cases}$$

在 $[-h,h]$ 上存在解 $x(t)$。

习 题

1.5.1 设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间，E 是以 θ 为内点的真凸子集，P 是由 E 产生的 Minkowski 泛函，求证：

(1) $x\in \mathring{E}\Longleftrightarrow P(x)<1$；

(2) $\overline{\mathring{E}}=\bar{E}$。

列紧性定有界

1.5.2 求证在 B 空间中，列紧集的凸包是列紧集。

1.5.3 设 C 是 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 中的一个紧凸集，映射 $T:C\to C$ 连续，求证 T 在 C 上有一个不动点。

1.5.4 设 C 是 B 空间 $\mathscr{X}$ 中的一个有界闭凸集，映射 $T_i:C\to\mathscr{X}(i=1,2)$ 适合

(1) $\forall x,y\in C\Rightarrow T_1x+T_2y\in C$；

(2) T_1 是一个压缩映射，T_2 是一个紧映射，

求证：T_1+T_2在C上至少有一个不动点。

√1.5.5 设A是$n\times n$矩阵，其元素$a_{ij}>0(1\leqslant i,j\leqslant n)$，求证：存在$\lambda>0$及各分量非负但不全为零的向量$x\in \mathbb{R}^n$，使得

$$Ax=\lambda x.$$

提示 在$\mathbb{R}^n$上考察子集

$$C\triangleq\left\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n}x_i=1, x_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)\right\},$$

并作映射

$$f(x)=\frac{Ax}{\sum_{j=1}^{n}(Ax)_j}.$$

√1.5.6 设$K(x,y)$是$[0,1]\times[0,1]$上的正值连续函数，定义映射

$$(Tu)(x)=\int_0^1 K(x,y)u(y)dy \qquad (\forall u\in C[0,1]).$$

求证：存在$\lambda>0$及非负但不恒为零的连续函数u，满足

$$Tu=\lambda u.$$

§6 内积空间

B^*空间上虽然有了范数，可以定义收敛，但是缺少一个重要概念——“角度”，所以还不能说到两个向量相互垂直。欧氏空间$\mathbb{R}^n$上两个向量的夹角是通过内积来定义的，在无穷维空间上也可引入类似的概念。

6.1 定义与基本性质

我们先从共轭双线性函数的概念入手。

定义1.6.1 线性空间$\mathscr{X}$上的一个二元函数$a(\cdot,\cdot):\mathscr{X}\times\mathscr{X}\to\mathbf{K}$，称为是共轭双线性函数(sequi-linear)，如果

(1) $a(x,\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)=\bar{\alpha}_1a(x,y_1)+\bar{\alpha}_2a(x,y_2)$；

(2) $a(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2, y)=\alpha_1 a(x_1,y)+\alpha_2 a(x_2,y)$,

其中 $\forall x,y,x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathscr{X}$, $\forall \alpha_1,\alpha_2\in\mathbf{K}$. 我们还称由

$$q(x)\triangleq a(x,x) \qquad (\forall x\in\mathscr{X}),$$

定义的函数为$\mathscr{X}$上由 a 诱导的二次型.

命题1.6.2 设 a 是$\mathscr{X}$上的共轭双线性函数, q 是由 a 诱导的二次型, 那末

$$q(x)\in\mathrm{R}^1(\forall x\in\mathscr{X})\Longleftrightarrow a(x,y)=\overline{a(y,x)} \quad (\forall x,y\in\mathscr{X}).$$

证 "$\Leftarrow$" 是显然的. 下证 "$\Rightarrow$". 从

$$q(x+y)=\overline{q(x+y)} \qquad (\forall x,y\in\mathscr{X}),$$

容易推出 $\quad a(x,y)+a(y,x)=\overline{a(x,y)}+\overline{a(y,x)}$. $\qquad$ (1.6.1)

在(1.6.1)中换 y 为 iy, 即得

$$-a(x,y)+a(y,x)=\overline{a(x,y)}-\overline{a(y,x)}. \qquad (1.6.2)$$

(1.6.1)与(1.6.2)相减即得 $a(x,y)=\overline{a(y,x)}$.

定义1.6.3 线性空间$\mathscr{X}$上的一个共轭双线性函数

$$(\cdot,\cdot):\mathscr{X}\times\mathscr{X}\to\mathbf{K},$$

称为是一个内积, 如果它满足:

(1) $(x,y)=\overline{(y,x)}$ $\quad(\forall x,y\in\mathscr{X})$ $\quad$ (共轭对称性);

(2) $(x,x)\geqslant 0$ $\quad(\forall x\in\mathscr{X})$, $(x,x)=0\Longleftrightarrow x=\theta$ (正定性).

具有内积的线性空间称为内积空间, 记作$(\mathscr{X},(\cdot,\cdot))$.

注 若在(2)中仅保存非负定条件: $(x,x)\geqslant 0(\forall x\in\mathscr{X})$, 则称$(\cdot,\cdot)$为一个半内积, 对应的空间称为半内积空间.

显然, 这个内积概念是有穷维欧氏空间上相应概念的推广.

例1.6.4 R^n, C^n 都是内积空间, 它们的内积分别定义为

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i(\forall x,y\in\mathrm{R}^n); \quad (x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{y}_i\ (\forall x,y\in\mathrm{C}^n),$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$.

例1.6.5 l^2空间(定义见例1.4.11)是内积空间, 规定内积

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\bar{y}_i,$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots),y=(y_1,y_2,\cdots,y_i,\cdots)\in l^2$。

例1.6.6 $L^2(\Omega,\mu)$(定义见例1.4.12)是内积空间，规定内积

$$(u,v)=\int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx,$$

其中 $u,v\in L^2(\Omega,\mu)$。

例1.6.7 在空间 $C^k(\bar{\Omega})$(定义见例1.4.13)中，规定内积

$$(u,v)=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_\Omega\partial^\alpha u(x)\overline{\partial^\alpha v(x)}dx\quad(\forall u,v\in C^k(\bar{\Omega})).$$

那末$(C^k(\bar{\Omega}),(\cdot,\cdot))$是一个内积空间。

和欧氏空间$\mathbf{R}^n$一样，由内积可以导出范数，这要用到下面一个重要的不等式。

命题1.6.8(Cauchy-Schwarz 不等式) 设$(\mathscr{X},(\cdot,\cdot))$是内积空间。若令

$$\|x\|=(x,x)^{\frac{1}{2}}\quad(\forall x\in\mathscr{X}),\tag{1.6.3}$$

则有

$$|(x,y)|\leqslant\|x\|\|y\|\quad(\forall x,y\in\mathscr{X});\tag{1.6.4}$$

而且其中等号当且仅当 $x=\lambda y(\lambda\in\mathbb{K})$时成立。

我们愿意就更一般的情形证明不等式(1.6.4)，这就是

命题1.6.9 设 a 是线性空间$\mathscr{X}$上的共轭双线性函数，$q(x)$是由 a 诱导的二次型。如果

$$q(x)\geqslant 0\quad(\forall x\in\mathscr{X})\quad\text{且}\quad q(x)=0\Longleftrightarrow x=\theta,$$

那末

$$|a(x,y)|\leqslant[q(x)q(y)]^{\frac{1}{2}}\quad(\forall x,y\in\mathscr{X});\tag{1.6.5}$$

而且其中等号当且仅当 $x=\lambda y(\lambda\in\mathbb{K})$时成立。

证 不妨设 $y\neq\theta$，对$\forall\lambda\in\mathbb{K}$考察

$$q(x+\lambda y)=q(x)+\bar{\lambda}a(x,y)+\lambda a(y,x)+|\lambda|^2q(y)\geqslant 0.\tag{1.6.6}$$

取 $\lambda=-a(x,y)/q(y)$，因为 $a(x,y)=\overline{a(y,x)}$（这是由假设 $q(x)\geqslant 0$，根据命题1.6.2推出的），所以

$$q(x)-\frac{2|a(x,y)|^2}{q(y)}+\frac{|a(x,y)|^2}{q(y)}\geqslant 0,$$

由此立得(1.6.5)。又当 $x=-\lambda y(\lambda\in\mathbb{K})$ 时，(1.6.5)中的等号成立。反之，若(1.6.5)中的等号成立，则(1.6.6)中的等号成立，从而 $x=-\lambda y(\lambda\in\mathbb{K})$。

命题1.6.10 内积空间 $(\mathscr{X},(\cdot,\cdot))$ 按(1.6.3)定义范数，是一个 B^* 空间。

证 只要证按(1.6.3)定义的 $\|\cdot\|$ 是范数。事实上，定义1.4.9中的(1)和(3)都是显然成立的，下面来验证(2)。

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=(x+y,x+y)\\&=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)\\&\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2\\&=(\|x\|+\|y\|)^2\qquad(\forall x,y\in\mathscr{X}).\end{aligned}$$

命题1.6.11 在内积空间 $(\mathscr{X},(\cdot,\cdot))$ 中，内积 (x,y) 是 $\mathscr{X}\times\mathscr{X}$ 上关于范数 $\|\cdot\|$ 的连续函数。

证 设 $x_n\to x,y_n\to y$。那末 $\|x_n\|$ 和 $\|y_n\|$ 有界，用 M 表示它们的一个上界，便有

$$\begin{aligned}&|(x_n,y_n)-(x,y)|\\&\quad\leqslant|(x_n,y_n)-(x,y_n)|+|(x,y_n)-(x,y)|\\&\quad\leqslant\|x_n-x\|\|y_n\|+\|x\|\|y_n-y\|\\&\quad\leqslant M\|x_n-x\|+\|x\|\|y_n-y\|\to 0\qquad(n\to\infty).\end{aligned}$$

命题1.6.12 内积空间 $(\mathscr{X},(\cdot,\cdot))$ 是严格凸的 B^* 空间。

证 $\forall\, 0<\lambda<1$，根据命题1.6.8我们有

$$\begin{aligned}&\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^2\\&\quad=\lambda^2\|x\|^2+2\lambda(1-\lambda)\mathrm{Re}(x,y)+(1-\lambda)^2\|y\|^2\\&\quad<(\lambda+(1-\lambda))^2=1\qquad(\text{当}\|x\|=\|y\|=1,x\neq y)。\ \blacksquare\end{aligned}$$

我们还要问：什么样的 B^*空间$(\mathscr{X},\|\cdot\|)$可以引入一个内积$(\cdot,\cdot)$适合

$$(x,x)^{\frac{1}{2}}=\|x\| \qquad (\forall x\in\mathscr{X}). \qquad (1.6.7)$$

命题1.6.13 在 B^*空间$(\mathscr{X},\|\cdot\|)$中，为了在$\mathscr{X}$上可引入一个内积$(\cdot,\cdot)$适合(1.6.7)，必须且仅须范数$\|\cdot\|$满足如下平行四边形等式：

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2) \qquad (\forall x,y\in\mathscr{X}). \qquad (1.6.8)$$

证 必要性可通过直接计算得到。为了证充分性，令

$$(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2) & (\text{当}\mathbf{K}=\mathbf{R}^1),\\ \dfrac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2) & (\text{当}\mathbf{K}=\mathbf{C}).\end{cases}$$

容易验证它是一个满足(1.6.7)的内积。

定义1.6.14 完备的内积空间称为 Hilbert 空间。

例1.6.4到例1.6.6都是 Hilbert 空间。下面我们再举一个在偏微分方程边值问题理论中特别有用的内积空间——$H_0^m(\Omega)$作为例子，为此先证明

引理1.6.15(Poincaré 不等式) 设 $C_0^m(\Omega)$表示有界开区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上一切m次连续可微，并在边界 $\partial\Omega$ 的某邻域内为0的函数集合。即

$$C_0^m(\Omega)=\{u\in C^m(\bar{\Omega})\,|\,u(x)=0,\text{当 }x\in\partial\Omega\text{ 的某邻域}\}.$$

那末$\forall u\in C_0^m(\Omega)$有

$$\sum_{|\alpha|<m}\int_\Omega|\partial^\alpha u(x)|^2dx\leqslant C\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega|\partial^\alpha u(x)|^2dx, \qquad (1.6.9)$$

其中C是仅依赖于区域Ω及m的常数。

证 因为Ω是有界的，我们可以把Ω放在某个边长为a的

立方体Ω_1内，适当选择坐标系，使得

$$\Omega_1=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in \mathbf{R}^n \mid 0\leqslant x_i\leqslant a(i=1,2,\cdots,n)\}.$$

在$\Omega_1\backslash\Omega$上补充定义$u=0$，经补充定义后，$u(x)$在Ω_1上m次连续可微，而且在边界上等于0。$\forall x\in\Omega_1$，

$$u(x)=\int_0^{x_1}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x_2,\cdots,x_n)dt.$$

再利用Cauchy-Schwarz不等式，我们有

$$|u(x)|^2\leqslant a\int_0^a\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2dx_1. \qquad (1.6.10)$$

在Ω_1上积分不等式(1.6.10)，我们得

$$\int_\Omega|u(x)|^2dx\leqslant a^2\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2dx$$

$$\leqslant a^2\int_\Omega|\mathrm{grad}\,u(x)|^2dx. \qquad (1.6.11)$$

然后逐次应用不等式(1.6.11)于$\partial^\alpha u(x)(|\alpha|<m)$，即得不等式(1.6.9)。∎

引理1.6.15表明在$C_0^m(\Omega)$上，

$$\|u\|_m\triangleq\left(\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega|\partial^\alpha u(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}; \qquad (1.6.12)$$

$$\|u\|\triangleq\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega|\partial^\alpha u(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1.6.13)$$

是一对等价模。记$C_0^m(\Omega)$按(1.6.12)完备化后的空间为$H_0^m(\Omega)$。它是$H^m(\Omega)$（定义见例1.4.14）的一个闭子空间。

例1.6.16 $H_0^m(\Omega)$是一个Hilbert空间，其内积定义为

$$(u,v)_m=\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega\partial^\alpha u(x)\,\overline{\partial^\alpha v(x)}\,dx \quad (\forall u,v\in C_0^m(\Omega)). \qquad (1.6.14)$$

注 当Ω的边界$\partial\Omega$具有光滑的法向导数时，$H_0^m(\Omega)$中的

元素实际上是满足边界条件：

$$u\Big|_{\partial\Omega}=\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=\cdots=\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{m-1}u\Big|_{\partial\Omega}=0$$

的$C^{m}(\Omega)$函数u的一种推广，其中$\partial/\partial n$是$\partial\Omega$上的法向导数。

6.2 正交与正交基

在内积空间$\mathscr{X}$中，可以引入两个向量夹角的概念，从而可定义什么叫垂直或正交。和欧氏空间一样，对内积空间中的两个向量x,y，我们用

$$\theta\triangleq\cos^{-1}\frac{|(x,y)|}{\|x\|\|y\|}$$

表示它们之间的夹角。

定义1.6.17 内积空间$\mathscr{X}$上的两个元素x与y称为是正交的，是指

$$(x,y)=0,$$

记作$x\perp y$。又设M是$\mathscr{X}$的一个非空子集，$x\in\mathscr{X}$。若对$\forall y\in M$都有$x\perp y$，则称x与M正交，记作$x\perp M$。此外我们还称集合

$$\{x\in\mathscr{X}\mid x\perp M\}$$

为M的正交补，记作$M^{\perp}$。

由定义可以直接推出

命题1.6.18 设$\mathscr{X}$是内积空间，M是$\mathscr{X}$的一个非空子集。

(1) 若$x\perp y_i(i=1,2)$，则

$$x\perp\lambda_1y_1+\lambda_2y_2\qquad(\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{K}).$$

(2) 若$x=y+z$，且$y\perp z$，则

$$\|x\|^2=\|y\|^2+\|z\|^2.$$

(3) 若$x\perp y_n(n\in\mathbf{N})$，且$y_n\to y$，则$x\perp y$。

(4) 若$x\perp M$，则$x\perp\operatorname{span}\{M\}$。

(5) $M^{\perp}$是$\mathscr{X}$的一个闭线性子空间。 ∎

现在我们把欧氏空间中的直角坐标系概念推广到一般的内积空间中去。

定义1.6.19 设$\mathscr{X}$是一个内积空间，集合$S=\{e_\alpha|\alpha\in A\}$是$\mathscr{X}$的一个子集。称$S$为正交集，是指

$$e_\alpha\perp e_\beta \qquad (\text{当 } \alpha\neq\beta,\forall\alpha,\beta\in A).$$

如果还有$\|e_\alpha\|=1(\forall\alpha\in A)$，则称$S$为正交规范集。又如果在$\mathscr{X}$中不存在非零元与$S$正交，即$S^\perp=\{\theta\}$，那末称$S$为完备的。

一个内积空间是否一定有完备的正交集？为了回答这个问题，我们引用一个与无穷归纳法等价的命题——Zorn引理。

引理1.6.20(Zorn) 设$\mathscr{X}$是一个半序集。如果它的每一个全序子集有一个上界，那末$\mathscr{X}$有一个极大元。

命题1.6.21 非$\{\theta\}$内积空间$\mathscr{X}$中必存在完备正交集。

证 因为$\mathscr{X}\neq\{\theta\}$，所以$\mathscr{X}$中的正交集依包含关系构成一个半序集类，并且每个全序子集类有一个上界，就是这些集之并集。依Zorn引理，这半序集类有极大元。我们来证明：这个极大元(记作S)就是完备正交集。因若不然，则必$\exists x_0\in S^\perp,x_0\neq\theta$，令$S_1=\{x_0\}\cup S$，得到$S_1$还是正交集，并且$S\subsetneqq S_1$，这便与$S$的极大性相矛盾。

定义1.6.22 内积空间$\mathscr{X}$中的正交规范集$S=\{e_\alpha|\alpha\in A\}$，称为一个基(或封闭的)是指$\forall x\in\mathscr{X}$，有下列表示：

$$x=\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha, \tag{1.6.15}$$

其中$\{(x,e_\alpha)|\alpha\in A\}$称为$x$关于基$\{e_\alpha|\alpha\in A\}$的Fourier系数。

定理1.6.23(Bessel不等式) 设$\mathscr{X}$是一个内积空间。如果$S=\{e_\alpha|\alpha\in A\}$是$\mathscr{X}$中的正交规范集，那末$\forall x\in\mathscr{X}$，有

$$\sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2\leqslant\|x\|^2. \tag{1.6.16}$$

证 首先对A的任意有限子集，不妨设它们是$1,2,\cdots,n$，证明

$$\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2\leqslant\|x\|^2. \tag{1.6.17}$$

因为

$$0 \leqslant \left\| x - \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i \right\|^2$$

$$= \left(x - \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i,\ x - \sum_{j=1}^{n} (x, e_j)\, e_j \right)$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2,$$

所以(1.6.17)成立。由此可见，对$\forall n \in \mathbf{N}$，适合$|(x, e_\alpha)| > 1/n$的$\alpha \in A$至多只有有穷多个。从而使得$(x, e_\alpha) \neq 0$的$\alpha \in A$至多有可数多个。于是(1.6.16)的左端实际上是至多可数项求和的级数。再由(1.6.17)我们有

$$\sum_{\alpha \in A_f} |(x, e_\alpha)|^2 \leqslant \|x\|^2,$$

其中A_f表示A的任意有限子集。由此立得(1.6.16)。

推论1.6.24 假设$\mathscr{H}$是 Hilbert 空间，且$\{e_\alpha \mid \alpha \in A\}$是$\mathscr{H}$中的正交规范集。那末对$\forall x \in \mathscr{H}$，有

$$\sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha \in \mathscr{H},$$

且
$$\left\| x - \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)|^2. \tag{1.6.18}$$

证 不妨设使得$(x, e_\alpha) \neq 0$的可数多个$\alpha \in A$是$1, 2, \cdots, n, \cdots$，那末

$$\sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n,$$

并由 Bessel 不等式可知$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$收敛，因此有

$$\left\| \sum_{n=m}^{m+P} (x, e_n)\, e_n \right\|^2 = \sum_{n=m}^{m+P} |(x, e_n)|^2 \to 0 \quad (m \to \infty, \forall P \in \mathbf{N}).$$

于是，$x_m=\sum_{n=1}^{m}(x,e_n)e_n$ 是基本列，从而

$$\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n=\lim_{m\to\infty}x_m\in\mathscr{X}.$$

又因为 $x-\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n\perp\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$，所以

$$\left\|x-\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2.$$

这就是(1.6.18)。 ▍

何时 Bessel 不等式取等号？何时 $\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha$ 等于 x？请看如下

定理1.6.25 设$\mathscr{X}$是一个 Hilbert 空间，若 $S=\{e_\alpha|\alpha\in A\}$ 是$\mathscr{X}$中的正交规范集，则如下三条等价：

(1) S是封闭的；

(2) S是完备的；

(3) Parseval 等式成立，即

$$\|x\|^2=\sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2\qquad(\forall x\in\mathscr{X}).\qquad(1.6.19)$$

证 (1)⇒(2). 若S不完备，则 $\exists x\in\mathscr{X}\setminus\{\theta\}$，使得

$$(x,e_\alpha)=0\qquad(\forall\alpha\in A).$$

但由封闭性有 $x=\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha=\theta$，矛盾。

(2)⇒(3). 若 $\exists x\in\mathscr{X}$ 使 Parseval 等式不成立，则由(1.6.18)，

$$\left\|x-\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2>0.$$

于是 $y \triangleq x-\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha\neq\theta$，但 $y\in S^\perp$。这与 S 完备性矛盾。

(3)⇒(1)。联合 Parseval 等式与(1.6.18)得到

$$\left\|x-\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2=0.$$

因此有
$$x=\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha. \blacksquare$$

下面举一些正交规范基的例子。

例1.6.26 在 $L^2[0,2\pi]$上，

$$e_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\qquad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

是一组正交规范基。$\forall u\in L^2[0,2\pi]$，对应的 Fourier 系数是

$$(u,e_n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}u(t)e^{-int}dt\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

例1.6.27 在 l^2空间上，

$$e_n=(\underbrace{0,0,\cdots,0,1}_{n},0,\cdots)\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

是一组正交规范基。

例1.6.28 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单位开圆域，$H^2(D)$表示在 D 内满足

$$\iint_D|u(z)|^2dxdy<\infty\qquad(z=x+iy)$$

的解析函数全体组成的空间。规定内积为

$$(u,v)=\iint_D u(z)\overline{v(z)}dxdy.$$

这时函数组

$$\varphi_n(z)=\sqrt{\frac{n}{\pi}}z^{n-1}\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

是一组正交规范基。设$u(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k z^k\in H^2(D)$，它对应的 Fourier 系数是

$$(u,\varphi_n)=\iint_D\sum_{k=0}^{\infty}b_k z^k\sqrt{\frac{n}{\pi}}\bar{z}^{n-1}dxdy$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\sqrt{\frac{\pi}{k+1}}(\varphi_{k+1},\varphi_n)=b_{n-1}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\quad(n=1,2,3,\cdots)。$$

6.3 正交化与 Hilbert 空间的同构

线性代数中的 Gram-Schmidt 正交化过程可以毫无困难地搬到内积空间上来。设$\{x_1,x_2,\cdots\}$是内积空间$\mathscr{X}$中的一列线性无关的元素。我们要构造一组正交规范集

$$S=\{e_i|i=1,2,\cdots\},$$

使得对$\forall n\in\mathbf{N}$，e_n是$x_1,x_2,\cdots,x_n$的线性组合，而且x_n也是$e_1,e_2,\cdots,e_n$的线性组合。其构造过程如下：

$$y_1=x_1,\qquad e_1=\frac{y_1}{\|y_1\|};$$

$$y_2=x_2-(x_2,e_1)e_1,\qquad e_2=\frac{y_2}{\|y_2\|};$$

$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots$$

$$y_n=x_n-\sum_{i=1}^{n-1}(x_n,e_i)e_i,\qquad e_n=\frac{y_n}{\|y_n\|};$$

$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots。$$

下面引入

定义1.6.29 设$(\mathscr{X}_1,(\cdot,\cdot)_1)$与$(\mathscr{X}_2,(\cdot,\cdot)_2)$是两个内积空间，如果存在$\mathscr{X}_1\to\mathscr{X}_2$的一个线性同构$T$满足：

$$(Tx,Ty)_2=(x,y)_1\qquad(\forall x,y\in\mathscr{X}_1),$$

则称内积空间$\mathscr{X}_1$与$\mathscr{X}_2$是同构的。

定理1.6.30 为了 Hilbert 空间$\mathscr{X}$是可分的，必须且仅须它

有至多可数的正交规范基 S。又若 S 的元素个数 $N<\infty$，则 $\mathscr{X}$ 同构于 $\mathbf{K}^n$；若 $N=\infty$，则 $\mathscr{X}$ 同构于 l^2。

证 必要性。设 $\{x_n\}_1^\infty$ 是 $\mathscr{X}$ 中的可数稠密子集，那末其中必存在一个线性无关的子集 $\{y_n\}_1^N$（$N<\infty$ 或 $N=\infty$），使得

$$\operatorname{span}\{y_n\}_1^N=\operatorname{span}\{x_n\}_1^\infty.$$

再对 $\{y_n\}_1^N$ 应用 Gram–Schmidt 过程，便构造出一个正交规范集 $\{e_n\}_1^N$。又因为

$$\overline{\operatorname{span}}\{e_n\}_1^N=\overline{\operatorname{span}}\{y_n\}_1^N=\mathscr{X},$$

所以 $\{e_n\}_1^N$ 是正交规范基。

充分性。设 $\{e_n\}_1^N$（$N<\infty$ 或 $N=\infty$）是 $\mathscr{X}$ 的正交规范基，那末集合

$$\left\{x=\sum_{n=1}^N a_n e_n \,\middle|\, \operatorname{Re}a_n \text{ 与 } \operatorname{Im}a_n \text{皆为有理数}\right\}$$

是 $\mathscr{X}$ 中的稠密子集。从而 $\mathscr{X}$ 是可分的。

对于正交规范基 $\{e_n\}_1^N$（$N<\infty$ 或 $N=\infty$），作对应

$$T: x\mapsto\left\{(x,e_n)\right\}_{n=1}^{n=N}\quad(\forall x\in\mathscr{X}).$$

根据 Parseval 等式我们有

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^N|(x,e_n)|^2\qquad(\forall x\in\mathscr{X}).$$

由此可见对应 T 是 $\mathscr{X}\to\mathbf{K}^N$（当 $N<\infty$）或 $\mathscr{X}\to l^2$（当 $N=\infty$）的一对一在上线性同构。此外，

$$\begin{aligned}(x,y)&=\left(\sum_{i=1}^N(x,e_i)e_i,\ \sum_{j=1}^N(y,e_j)e_j\right)\\&=\sum_{i=1}^N(x,e_i)\overline{(y,e_i)}\qquad(\forall x,y\in\mathscr{X}).\end{aligned}$$

因此 T 还是保持内积的。于是当 $N<\infty$ 时，$\mathscr{X}$ 同构于 $\mathbf{K}^N$；而当 $N=\infty$ 时，$\mathscr{X}$ 同构于 l^2。

6.4 再论最佳逼近问题

我们在§4.5中曾经把最佳逼近问题看成求空间上一点到它的一个线性子空间的距离问题，在那里给定的子空间是有穷维的。对于无穷维闭线性子空间M来说，一般不知道能否对给定的$x\in\mathscr{X}$，找到一点$y\in M$适合

$$\inf_{z\in M}\|x-z\|=\|x-y\|$$

(见习题1.4.14)。然而在Hilbert空间中，不但答案是肯定的，而且可以用更为一般的闭凸子集C来代替闭线性子空间M。现在我们先从$x=\theta$这一特殊情形开始。

定理1.6.31 如果C是Hilbert空间$\mathscr{X}$中的一个闭凸子集，那末在C上存在唯一元素x_0取到最小模。

证 存在性。若$\theta\in C$，则$x_0=\theta$。若$\theta\notin C$，则

$$d\triangleq\inf_{z\in C}\|z\|>0.$$

由下确界定义，$\forall n\in\mathbb{N}$，$\exists x_n\in C$，使得

$$d\leqslant\|x_n\|\leqslant d+\frac{1}{n}\qquad(n=1,2,\cdots).\qquad(1.6.20)$$

如果$\{x_n\}_1^\infty$有极限x_0，那末由C的闭性，$x_0\in C$，并由(1.6.20)，$\|x_0\|=d$，即x_0取到了C上元素的最小模。为了$\{x_n\}_1^\infty$有极限，只须验证$\{x_n\}_1^\infty$是一个基本列。这要用到平行四边形等式：

$$\|x_m-x_n\|^2=2(\|x_m\|^2+\|x_n\|^2)-4\left\|\frac{x_m+x_n}{2}\right\|^2$$

$$\leqslant2\left[\left(d+\frac{1}{n}\right)^2+\left(d+\frac{1}{m}\right)^2\right]-4d^2\to0\quad(\text{当 }n,m\to\infty).$$

唯一性。如果有$x_0,\hat{x}_0\in C$使得$\|x_0\|=\|\hat{x}_0\|=d$，那末

$$\|x_0-\hat{x}_0\|^2=2(\|x_0\|^2+\|\hat{x}_0\|^2)-4\left\|\frac{x_0+\hat{x}_0}{2}\right\|^2$$

$$\leqslant4d^2-4d^2=0,$$

即得 $x_0=\hat{x}_0$(见图1.6.1)。

推论1.6.32 若 C 是 Hilbert 空间 $\mathscr{X}$ 中的一个闭凸子集，则对 $\forall y\in\mathscr{X}$，$\exists|\, x_0\in C$，使得

$$\|y-x_0\|=\inf_{x\in C}\|x-y\|. \tag{1.6.21}$$

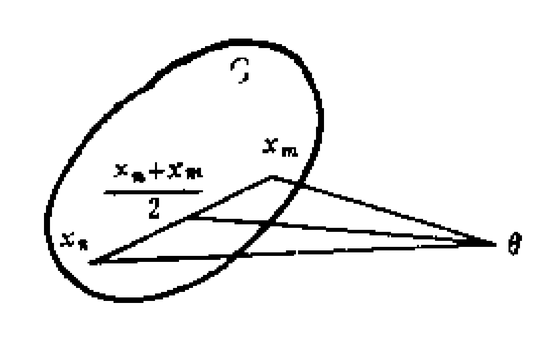


图 1.6.1

证 只须考察集合 $C-\{y\}\triangleq\{x-y\mid x\in C\}$，它显然还是 $\mathscr{X}$ 上的一个闭凸子集。根据定理1.6.31，$\exists|\, z_0\in C-\{y\}$，使得

$$\|z_0\|=\inf_{z\in C-\{y\}}\|z\|.$$

令 $x_0\triangleq z_0+y$，便得到(1.6.21)。

特例 若 M 是 Hilbert 空间 $\mathscr{X}$ 上的一个闭线性子空间，则对 $\forall y\in\mathscr{X}$，$\exists|\, x_0\in M$，使得

$$\|y-x_0\|=\inf_{x\in M}\|x-y\|. \quad |$$

虽然我们证明了最佳逼近问题(1.6.21)的解 x_0(简称为最佳逼近元)是存在唯一的。但是上述证明并没有告诉我们这个元素有什么性质。下面一个定理给出最佳逼近元的刻划。

定理1.6.33 设 C 是内积空间 $\mathscr{X}$ 中的一个闭凸子集，$\forall y\in\mathscr{X}$，为了 x_0 是 y 在 C 上的最佳逼近元，必须且仅须它适合

$$\operatorname{Re}(y-x_0,x_0-x)\geqslant 0 \quad (\forall x\in C). \tag{1.6.22}$$

证 对 $\forall x\in C$，考察函数

$$\varphi_x(t)=\|y-tx-(1-t)x_0\|^2 \quad (t\in[0,1]).$$

显然，为了 x_0 是 y 在 C 上的最佳逼近元，必须且仅须

$$\varphi_x(t)\geqslant\varphi_x(0) \quad (\forall x\in C,\forall t\in[0,1]). \tag{1.6.23}$$

下证

$$(1.6.22)\Longleftrightarrow(1.6.23). \tag{1.6.24}$$

因为

$$\varphi_x(t)=\|(y-x_0)+t(x_0-x)\|^2$$
$$=\|y-x_0\|^2+2t\mathrm{Re}(y-x_0,x_0-x)+t^2\|x_0-x\|^2,$$

所以 $$\varphi_x'(0)=2\mathrm{Re}(y-x_0,x_0-x). \tag{1.6.25}$$

因此 $$(1.6.22)\Longleftrightarrow\varphi_x'(0)\geqslant 0. \tag{1.6.26}$$

又因为 $$\varphi_x(t)-\varphi_x(0)=\varphi_x'(0)t+\|x_0-x\|^2t^2,$$

所以 $$\varphi_x'(0)\geqslant 0\Longleftrightarrow(1.6.23). \tag{1.6.27}$$

联合(1.6.26)与(1.6.27)即得(1.6.24)。

推论1.6.34 设M是 Hilbert 空间$\mathscr{H}$的一个闭线性子流形。$\forall x\in\mathscr{H}$，为了y是x在M上的最佳逼近元，必须且仅须它适合

$$x-y\perp M-\{y\}\triangleq\{w=z-y\mid\forall z\in M\}. \tag{1.6.28}$$

证 由定理1.6.33，为了y是x在M上的最佳逼近元，必须且仅须

$$\mathrm{Re}(x-y,y-z)\geqslant 0\qquad(\forall z\in M). \tag{1.6.29}$$

因为M是线性流形，所以$\forall z\in M$可表示为

$$z=y+w\qquad(w\in M-\{y\}). \tag{1.6.30}$$

注意到$M-\{y\}$是线性子空间，且当z跑遍M时，w跑遍$M-\{y\}$。将(1.6.30)代入(1.6.29)得

$$\mathrm{Re}(x-y,w)\leqslant 0\qquad(\forall w\in M-\{y\}). \tag{1.6.31}$$

在(1.6.31)中，用$-w$代替w，便推出

$$\mathrm{Re}(x-y,w)=0\qquad(\forall w\in M-\{y\}). \tag{1.6.32}$$

进一步在(1.6.32)中用$\mathrm{i}w$代替w，便推出

$$(x-y,w)=0\qquad(\forall w\in M-\{y\}).$$

这就是(1.6.28)。

特例 当M是闭线性子空间时$M-\{y\}=M$。因此，为了y是x在M上的最佳逼近元，必须且仅须它适合：$x-y\perp M$。

推论1.6.35(正交分解) 设M是 Hilbert 空间$\mathscr{H}$上的一个闭线性子空间，那末$\forall x\in\mathscr{H}$，存在着下列唯一的正交分解：

$$x=y+z\qquad(y\in M,z\in M^{\perp}). \tag{1.6.33}$$

证 取y为x在M上的最佳逼近元，而$z=x-y$，即为满足

(1.6.33)的分解。又若还存在另外一种分解：

$$x = y' + z' \qquad (y' \in M,\ z' \in M^{\perp}),$$

则
$$y - y' = z - z' \,(\in M \cap M^{\perp}) = \theta,$$

即得分解的唯一性。

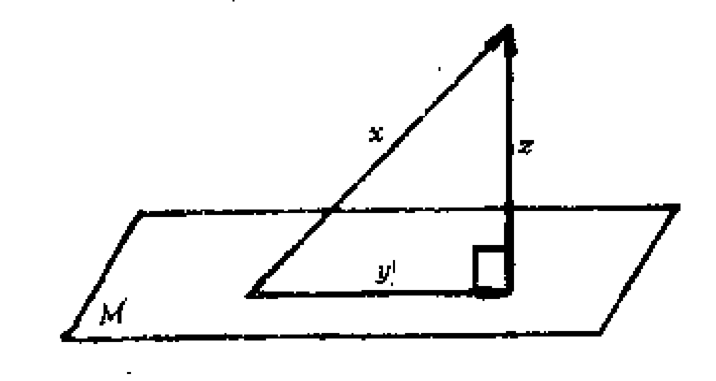


图 1.6.2

注 由 x 的正交分解产生的 y 称为 x 在 M 上的正交投影（见图 1.6.2）。



6.5 *应用*



1. 最小二乘法。

(1) 实际观测问题．许多实际观测数据的处理问题如下：已知量 y 与量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之间呈线性关系：

$$y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

但事先这些线性系数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是不知道的。为了确定它们观测数据 m 次，即测得 m 组数，如表1.6.3所示。如果观测是绝对精确的话，原则上只要测量 $m = n$ 次。通过线性方程组就可以解出 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$。事实上，任何观测都不可避免带有误差。这样便多观测些次数，即 $m > n$。于是方程的个数大于未知数的个数。今按下述意义确定系数：求 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，使得

$$\min_{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)} \sum_{j=1}^{m} \left| y^{(j)} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{(j)} \right|^2 = \sum_{j=1}^{m} \left| y^{(j)} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^{(j)} \right|^2.$$

这个问题可以看成是在空间 $\mathbb{R}^m$ 中，求由表1.6.3中的后 n 列向量张成的子空间上的元素，对于给定的表1.6.3中的第一列向量的最佳逼近。

表 1.6.3

$y^{(1)}$,	$x_1^{(1)}$,	$x_2^{(1)}$,	$\cdots$,	$x_n^{(1)}$
$y^{(2)}$,	$x_1^{(2)}$,	$x_2^{(2)}$,	$\cdots$,	$x_n^{(2)}$
$y^{(3)}$,	$x_1^{(3)}$,	$x_2^{(3)}$,	$\cdots$,	$x_n^{(3)}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$y^{(m)},\quad x_1^{(m)},\quad x_2^{(m)},\quad \cdots,\quad x_n^{(m)}$$

(2) 平方平均逼近。在函数逼近论中，对于给定的一般函数 $f\in L^2[a,b]$，要求用给定的 n 个 $L^2[a,b]$ 函数 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 的线性组合按平方平均意义求最佳逼近。即求系数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，使得

$$\min_{a_1,a_2,\cdots,a_n}\int_a^b\left|f(x)-\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i(x)\right|^2dx$$

$$=\int_a^b\left|f(x)-\sum_{i=1}^n\lambda_i\varphi_i(x)\right|^2dx.$$

(3) 最佳估计问题。设 $(\Omega,\mathscr{B},P)$ 是一个概率空间。即一个测度空间，满足 $P(\Omega)=1$。所谓一个随机变量 X 就是 $(\Omega,\mathscr{B},P)$ 上的一个可测函数。在随机过程中，常对随机变量 $X(\omega)$ 用另一组随机变量 $X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega)$ 的线性组合来估计。设 X，$X_1,X_2,\cdots,X_n\in L^2(\Omega,\mathscr{B},P)$，求系数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，使得

$$\min_{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n}\int_\Omega\left|X(\omega)-\sum_{i=1}^n a_iX_i(\omega)\right|^2dP(\omega)$$

$$=\int_\Omega\left|X(\omega)-\sum_{i=1}^n\lambda_iX_i(\omega)\right|^2dP(\omega).$$

上面三个问题本质上是一个：在 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上给定 x 及 $x_1,x_2,\cdots,x_n$。要求出 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$，使得

$$\min_{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n}\left\|x-\sum_{i=1}^n a_ix_i\right\|=\left\|x-\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i\right\|.$$

从几何上看，就是求 x 在由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 张成的子空间 M 上的正交投影。不妨设 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是线性无关的，根据推论1.6.34的特例，为了 $x_0=\sum\limits_{i=1}^n\lambda_ix_i$ 是所求的解，必须且仅须

$$(x-x_0,x_j)=0\qquad(j=1,2,\cdots,n),$$

即 $$\sum_{i=1}^{n}\lambda_j(x_i,x_j)=(x,x_i) \qquad (j=1,2,\cdots,n)。\quad (1.6.4)$$

因为解$\{\lambda_i\}_1^n$是存在唯一的，所以线性方程组(1.6.34)的系数行列式不等于0。由此求得

$$\lambda_i=\frac{\begin{vmatrix}(x_1,x_1) & \cdots(x,x_1) & \cdots(x_n,x_1)\\ (x_1,x_2) & \cdots(x,x_2) & \cdots(x_n,x_2)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ (x_1,x_n) & \cdots(x,x_n) & \cdots(x_n,x_n)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(x_1,x_1) & \cdots(x_i,x_1) & \cdots(x_n,x_1)\\ (x_1,x_2) & \cdots(x_i,x_2) & \cdots(x_n,x_2)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ (x_1,x_n) & \cdots(x_i,x_n) & \cdots(x_n,x_n)\end{vmatrix}} \qquad (i=1,2,\cdots,n)。$$

2. 曲线光顺与样条函数(spline)。在生产自动化、数值化的过程中，光顺曲线，即用一定的程序近似描述出一条光滑曲线，在实际应用中是非常重要的。样条函数是应这种要求提出来的。问题提法如下：假设在平面上，给定一组数对$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，其中$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$。作一曲线通过上述各点，并使其"尽可能地平滑"。所谓"平滑"，它确切的意义是指这条曲线$y=f(x)$的曲率$y''/\sqrt{1+(y')^2}$的绝对值很小，通常略去分母，近似地指$|y''|$小。

定义1.6.36 称$y=S_{\Delta,g}(x)$是区间$[a,b]$上的一个样条函数，是指

$$y\in S\triangleq\{z\in C^2[a,b]\,|\,z(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots,n),\\ z'(x_0)=y_0',z'(x_n)=y_n'\},$$

且 $$\int_a^b|y''(x)|^2dx=\min_{z\in S}\int_a^b|z''(x)|^2dx。$$

其中 $\Delta=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$，适合$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$；

$$g=(y_0,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_0',y_n')\in\mathrm{R}^{n+3}$$

是一个给定的向量。

为简单起见，我们只考虑齐次边界条件的情形，即假设 $y_0 = y_n = y'_0 = y'_n = 0$（一般情形只要减去一个适当的函数，便可化归这种情形）。这时引入空间

$$H_0^2[a,b] \triangleq \left\{ u \in C^1[a,b] \,\middle|\, \begin{array}{l} u' \text{绝对连续,其 p.p. 导数 } u'' \in L^2[a,b], \\ u(a) = u(b) = u'(a) = u'(b) = 0 \end{array} \right\},$$

并规定内积 $(u,v) = \int_a^b u''(t)v''(t)dt \ (\forall u, v \in H_0^2[a,b])$。我们可以验证 $(H_0^2[a,b], (\cdot\,,\cdot))$ 是 Hilbert 空间（留作练习）。在 $H_0^2[a,b]$ 上，考虑下列线性子流形：

$$M_{\Delta,g} \triangleq \{u \in H_0^2[a,b] \mid u(x_i) = y_i (i = 1, 2, \cdots, n)\}.$$

利用等式

$$u(t) = \int_a^t u'(\tau)d\tau = \int_a^t (t-\tau)u''(\tau)d\tau \quad (\forall u \in H_0^2[a,b], a \leqslant t \leqslant b),$$

推得

$$|u(t)| \leqslant (b-a)^{\frac{3}{2}} \left(\int_a^b |u''(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} (\forall u \in H_0^2[a,b], a \leqslant t \leqslant b).$$

由此容易推出 $M_{\Delta,g}$ 是闭的。根据定理1.6.31，在 $M_{\Delta,g}$ 上存在唯一元素 $S_{\Delta,g}$ 取到最小模，即 $\exists | S_{\Delta,g} \in M_{\Delta,g}$，使得

$$\int_a^b |S''_{\Delta,g}(t)|^2 dt = \min_{u \in M_{\Delta,g}} \int_a^b |u''(t)|^2 dt.$$

$S_{\Delta,g}$ 就是所要求的样条函数。

为了进一步弄清这个函数的性质，我们利用推论1.6.34得到

$$(S_{\Delta,g}, w) = 0 \qquad (\forall w \in M), \qquad (1.6.35)$$

其中 $\quad M \triangleq \{u \in H_0^2[a,b] \mid u(x_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1)\}$.

对限制在每个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的函数

$$w_i \in H_0^2[x_i, x_{i+1}] \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n-1),$$

令

$$w=\begin{cases} w_i & (t\in[x_i,x_{i+1}]), \\ 0 & (t\overline{\in}[x_i,x_{i+1}]). \end{cases}$$

那末 $w\in M$，从而由(1.6.35)得

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} S''_{\Delta,s}(t)w''_i(t)dt=0 \quad (w_i\in H_0^2[x_i,x_{i+1}],i=0,1,\cdots,n-1). \tag{1.6.36}$$

为了从(1.6.36)中提取关于 $S_{\Delta,s}(x)$的信息，我们先证一个

引理1.6.37 若 $f\in L^2[\alpha,\beta]$，并适合

$$\int_\alpha^\beta fw''dt=0 \quad (\forall w\in H_0^2[\alpha,\beta]), \tag{1.6.37}$$

则 $f(t)$在$[\alpha,\beta]$上 p.p.是一个线性函数 $At+B$。

证 因为 $H_0^2[\alpha,\beta]$在 $L^2[\alpha,\beta]$中稠密，我们只要找到常数 A,B(依赖于 f)，使得

$$\int_\alpha^\beta fwdt=A\int_\alpha^\beta tw(t)dt+B\int_\alpha^\beta w(t)dt \quad (\forall w\in H_0^2[\alpha,\beta]). \tag{1.6.38}$$

为此先看如果(1.6.38)成立的话，A,B 应该等于什么？任取 $w=\varphi_0(t)\in H_0^2[\alpha,\beta]$，使得

$$\int_\alpha^\beta \varphi_0(t)dt=0, \quad 且\int_\alpha^\beta t\varphi_0(t)dt=1. \tag{1.6.39}$$

那末按(1.6.38)应有

$$A=\langle f,\varphi_0\rangle. \tag{1.6.40}$$

其中$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示 $L^2[\alpha,\beta]$上的内积。再任取 $w=\varphi_1(t)\in H_0^2[\alpha,\beta]$ 使得

$$\int_\alpha^\beta t\varphi_1(t)dt=0, \quad 且 \quad \int_\alpha^\beta \varphi_1(t)dt=1. \tag{1.6.41}$$

那末按(1.6.38)应有

$$B = \langle f, \varphi_1 \rangle. \tag{1.6.42}$$

现在假定 $\varphi_0, \varphi_1, A, B$ 按(1.6.39)—(1.6.42)取好，那末 $\forall w \in H_0^2[\alpha,\beta]$,

$$\langle f(t) - At - B, w \rangle = \langle f, h \rangle, \tag{1.6.43}$$

其中 $$h \triangleq w - \varphi_0 \int_\alpha^\beta t w(t) dt - \varphi_1 \int_\alpha^\beta w(t) dt.$$

由(1.6.39)与(1.6.41)推出

$$\int_\alpha^\beta h(t)\ dt = \int_\alpha^\beta t h(t) dt = 0.$$

从而方程：

$$\begin{cases} \psi''(t) = h(t), \\ \psi(\alpha) = \psi(\beta) = \psi'(\alpha) = \psi'(\beta) = 0 \end{cases}$$

有解，其解是

$$\psi(t) = \int_\alpha^t (t-\tau) h(\tau) d\tau \in H_0^2[\alpha, \beta].$$

于是联合(1.6.37)与(1.6.43)便有

$$\langle f(t) - At - B, w \rangle = \langle f, h \rangle = \langle f, \psi'' \rangle = 0 (\forall w \in H_0^2[\alpha,\beta]).$$

这就是要证的(1.6.38)。▎

应用这个引理，由(1.6.36)看出对 $\forall\, 0 \leqslant i \leqslant n-1$，有

$$S_{\Delta, g}(t) = A_i t^3 + B_i t^2 + C_i t + D_i \quad (当\ t \in [x_i, x_{i+1}]).$$

即样条函数是一个逐段三次多项式。再由分部积分公式，我们看到

$$\begin{aligned}(S_{\Delta, g}, w) &= \int_a^b S''_{\Delta, g}(t) w''(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} S''_{\Delta, g}(t) w''(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} [S''_{\Delta, g}(x_i + 0) - S''_{\Delta, g}(x_i - 0)] w'(x_i) \quad (\forall w \in M).\end{aligned}$$

联合(1.6.35)，由于w在M中的任意性，我们有

$$S''_{\Delta,g}(x_i+0)=S''_{\Delta,g}(x_i-0) \qquad (i=1,2,\cdots,n-1).$$

总结上述结果我们得到

定理1.6.38 任意给定$[a,b]$的分割$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,及向量$g=(y_0,y_1,\cdots,y_n,y'_0,y'_n)$,存在唯一的样条函数$y=S_{\Delta,g}(x)$,它在$[a,b]$上整体二次连续可微，并且在相邻的两个分点之间是三次多项式。

习 题

1.6.1(极化恒等式) 设a是线性空间$\mathscr{X}$上的共轭双线性函数，q是由a诱导的二次型，求证：对$\forall x,y\in\mathscr{X}$有

$$a(x,y)=\frac{1}{4}\{q(x+y)-q(x-y)+\mathrm{i}q(x+\mathrm{i}y)-\mathrm{i}q(x-\mathrm{i}y)\}.$$

1.6.2 求证在$C[a,b]$中不可能引进一种内积$(\cdot,\cdot)$,使其满足

$$(f,f)^{\frac{1}{2}}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| \qquad (\forall f\in C[a,b]).$$

1.6.3 在$L^2[0,T]$中，求证函数

$$x\mapsto\left|\int_0^T e^{-(T-\tau)}x(\tau)d\tau\right| \qquad (\forall x\in L^2[0,T])$$

在单位球面上达到最大值，并求出此最大值和达到最大值的元素x。

提示 利用Cauchy-Schwarz不等式及其取等号的条件。

1.6.4 设M,N是内积空间中的两个子集，求证：

$$M\subset N\Rightarrow N^\perp\subset M^\perp.$$

1.6.5 设M是Hilbert空间$\mathscr{X}$的子集，求证：

$$(M^\perp)^\perp=\overline{\mathrm{span}M}.$$

1.6.6 在$L^2[-1,1]$中，问偶函数集的正交补是什么？证明你的结论。

1.6.7 在 $L^2[a,b]$中，考察函数集 $S=\{e^{2\pi inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$。

(1) 若$|b-a|\leqslant 1$，求证：$S^{\perp}=\{\theta\}$；

(2) 若$|b-a|>1$，求证：$S^{\perp}\neq\{\theta\}$。

1.6.8 设$\mathscr{H}$表示闭单位圆上的解析函数全体，内积定义为

$$(f,g)=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)\overline{g(z)}}{z}dz \quad (\forall f,g\in\mathscr{H}).$$

求证：$\{z^n/\sqrt{2\pi}\}_{n=0}^{\infty}$是一组正交规范集。

1.6.9 设$\{e_n\}_1^{\infty},\{f_n\}_1^{\infty}$是 Hilbert 空间$\mathscr{H}$中的两个正交规范集，满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|e_n-f_n\|^2<1.$$

求证：$\{e_n\}$和$\{f_n\}$两者中一个完备蕴含另一个完备。

1.6.10 设$\mathscr{H}$是 Hilbert 空间，$\mathscr{H}_0$是$\mathscr{H}$的闭线性子空间，$\{e_n\},\{f_n\}$分别是$\mathscr{H}_0$和$\mathscr{H}_0^{\perp}$的正交规范基。求证：$\{e_n\}\cup\{f_n\}$是$\mathscr{H}$的正交规范基。

1.6.11 设 $H^2(D)$是按例1.6.28定义的内积空间。

(1) 如果 $u(z)$的 Taylor 展开式是 $u(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k$，求证：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|b_k|^2}{1+k}<\infty;$$

(2) 设 $u(z),v(z)\in H^2(D)$，并且

$$u(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k,\qquad v(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k,$$

求证：
$$(u,v)=\pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k\bar{b}_k}{k+1};$$

(3) 设 $u(z)\in H^2(D)$，求证：

$$|u(z)|\leqslant\frac{\|u\|}{\sqrt{\pi}(1-|z|)}\qquad(\forall\,|z|<1);$$

(4) 验证 $H^2(D)$ 是 Hilbert 空间。

1.6.12 设 $\mathscr{X}$ 是内积空间，$\{e_n\}$ 是 $\mathscr{X}$ 中的正交规范集，求证：

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)}\right|\leqslant\|x\|\|y\| \qquad (\forall x,y\in\mathscr{X}).$$

1.6.13 设 $\mathscr{X}$ 是一个内积空间，$\forall x_0\in\mathscr{X}$，$\forall r>0$，令

$$C=\{x\in\mathscr{X}\mid\|x-x_0\|\leqslant r\}.$$

(1) 求证：C 是 $\mathscr{X}$ 中的闭凸集。

(2) $\forall x\in\mathscr{X}$，令

$$y=\begin{cases} x_0+r(x-x_0)/\|x-x_0\| & (\text{当 } x\overline{\in}C),\\ x & (\text{当 } x\in C),\end{cases}$$

求证：y 是 x 在 C 中的最佳逼近元。

1.6.14 求 $(a_0,a_1,a_2)\in\mathbb{R}^3$，使得 $\int_0^1|e^t-a_0-a_1t-a_2t^2|^2dt$ 取最小值。

1.6.15 设 $f(x)\in C^2[a,b]$，满足边界条件：

$$f(a)=f(b)=0,\quad f'(a)=1,\quad f'(b)=0.$$

求证：

$$\int_a^b|f''(x)|^2dx\geqslant\frac{4}{b-a}.$$

1.6.16 (变分不等式)设 $\mathscr{X}$ 是一个 Hilbert 空间，$a(x,y)$ 是 $\mathscr{X}$ 上的共轭对称的双线性函数，$\exists M>0$，$\delta>0$，使得

$$\delta\|x\|^2\leqslant a(x,x)\leqslant M\|x\|^2 \qquad (\forall x\in\mathscr{X}).$$

又设 $u_0\in\mathscr{X}$，C 是 $\mathscr{X}$ 上的一个闭凸子集。求证：函数

$$x\mapsto a(x,x)-\mathrm{Re}(u_0,x)$$

在 C 上达到最小值，并且达到最小值的点 x_0 满足

$$\mathrm{Re}[2a(x_0,x-x_0)-(u_0,x-x_0)]\geqslant 0 \quad (\forall x\in C).$$

第二章　线性算子与线性泛函

线性算子和线性泛函是泛函分析研究的基本对象。本章研究线性算子和线性泛函的一般概念和基本性质。

§1　线性算子的概念

1.1　线性算子和线性泛函的定义

算子的概念起源于运算；例如，代数运算：

$$x \mapsto Ax \qquad (\forall x \in \mathbf{R}^n),$$

其中 A 是一个 $n\times n$ 矩阵；求导运算：

$$u(x) \mapsto P(\partial_x)u(x) \qquad (\forall u \in C^\infty(\bar{\Omega})),$$

其中 $P(\cdot)$是一个多项式，而 ∂_x 是偏导数运算；积分变换：

$$u(x) \mapsto \int_\Omega K(x,y)u(y)dy \quad (\forall u \in C(\bar{\Omega})),$$

其中 $K(x,y)$是 $\Omega\times\Omega$ 上的可积函数。上一章遇到过的"映射"实际上也就是算子。

线性算子的概念起源于线性代数中的线性变换。

定义2.1.1　设$\mathscr{X}, \mathscr{Y}$是两个线性空间，D 是$\mathscr{X}$的一个线性子空间。$T: D\to\mathscr{Y}$ 是一种映射，D 称为 T 的定义域，有时记作 $D(T)$。$R(T)=\{Tx \mid \forall x\in D\}$称为$T$ 的值域。如果

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty \quad (\forall x,y\in D, \forall \alpha,\beta\in\mathbf{K}),$$

那末称T 是一个线性算子。

例2.1.2　设$\mathscr{X}=\mathbf{R}^n, \mathscr{Y}=\mathbf{R}^m, T=(t_{ij})_{m\times n}$。如果

$$x \mapsto Tx = \left(\sum_{j=1}^n t_{ij}x_j\right)_{i=1}^m \quad (\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n),$$

那末T 是一个线性算子。

例2.1.3 设$\mathscr{X}=\mathscr{Y}=C^{\infty}(\bar{\Omega})$，又设微分多项式

$$P(\partial_x)=\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha(x)\partial_x^\alpha \qquad (a_\alpha(x)\in C^\infty(\bar{\Omega})).$$

如果$T:u(x)\mapsto P(\partial_x)u(x)(\forall u\in\mathscr{X})$，那末$T$便是一个$\mathscr{X}$到$\mathscr{Y}$的线性算子。

注 若$\mathscr{X}=\mathscr{Y}=L^2(\Omega),D(T)=C^m(\bar{\Omega})$，则上面定义的算子$T$也是线性的。

例2.1.4 设$\mathscr{X}=L^1(-\infty,\infty)$，若规定

$$T:u(x)\mapsto\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\xi\cdot x}u(x)dx \qquad (\forall u\in\mathscr{X}),$$

那末T是一个线性算子。

定义2.1.5 取值于实数(复数)的线性算子称为实(复)线性泛函，记作$f(x)$或$\langle f,x\rangle$(即线性函数)。

例2.1.6 设$\mathscr{X}=C(\bar{\Omega})$，若规定

$$f(x)\triangleq\int_\Omega x(\xi)d\xi \qquad (\forall x\in\mathscr{X}),$$

则f是一个线性泛函，但$x(\xi)\mapsto\int_\Omega x^2(\xi)d\xi$却不是线性泛函。

例2.1.7 设$\mathscr{X}=C^\infty(\Omega)$，若对某个指标$\alpha$及$\xi_0\in\Omega$规定

$$f(u)=\partial^\alpha u(\xi_0) \qquad (\forall u\in\mathscr{X}),$$

则f是$C^\infty(\Omega)$上的一个线性泛函。

1.2 线性算子的连续性和有界性

算子的连续性概念就是映象的连续性概念。

定义2.1.8 设$\mathscr{X},\mathscr{Y}$是F^*空间，$D(T)\subset\mathscr{X}$，线性算子$T:D(T)\to\mathscr{Y}$，称T在$x_0\in D(T)$是连续的，如果

$$x_n\in D(T),x_n\to x_0\Rightarrow Tx_n\to Tx_0.$$

命题2.1.9 对于线性算子T，为了它在$D(T)$内处处连续，必须且仅须它在$x=\theta$处连续。

证 若T在θ处连续，那末对$\forall x_n, x_0 \in D(T), x_n \to x_0$有

$$x_n - x_0 \to \theta \Rightarrow Tx_n - Tx_0 = T(x_n - x_0) \to T\theta = \theta.$$

定义2.1.10 设$\mathscr{X}, \mathscr{Y}$都是B^*空间，称线性算子$T: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$是有界的，如果有常数$M \geqslant 0$，使得$\|Tx\|_{\mathscr{Y}} \leqslant M\|x\|_{\mathscr{X}} (\forall x \in \mathscr{X})$。

定义2.1.11 设$\mathscr{X}, \mathscr{Y}$都是B^*空间；为了线性算子T连续，必须且只须T有界。

证 充分性显然。下证必要性。若不然，则$\exists x_n \in \mathscr{X}$，使得

$$\|Tx_n\| > n\|x_n\|. \qquad 令 \quad y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|},$$

便有$\|Ty_n\| > 1$。但$y_n \to \theta$，便与连续性矛盾。

定义2.1.12 用$\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$表示一切由$\mathscr{X}$到$\mathscr{Y}$的有界线性算子的全体，并规定

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathscr{X} \setminus \theta} \|Tx\| / \|x\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|,$$

为$T \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$的范数。特别用$\mathscr{L}(\mathscr{X})$表示$\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{X})$及用$\mathscr{X}^*$表示$\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathbf{K})$，即$\mathscr{X}^*$表示$\mathscr{X}$上的线性有界泛函全体。

定理2.1.13 设$\mathscr{X}$是B^*空间，$\mathscr{Y}$是B空间，若在$\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$上规定线性运算：

$$(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)(x) = \alpha_1 T_1 x + \alpha_2 T_2 x \qquad (\forall x \in \mathscr{X}),$$

其中$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{K}$，$T_1, T_2 \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$，则$\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$按$\|T\|$构成一个Banach空间。

证 显然$\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$是一个线性空间，兹证$\|T\|$是范数：

$$\|T\| \geqslant 0, \quad \|T\| = 0 \Longleftrightarrow Tx = 0 (\forall x \in \mathscr{X}) \Longleftrightarrow T = 0;$$

$$\begin{aligned} \|T_1 + T_2\| &= \sup_{\|x\|=1} \|T_1 x + T_2 x\| \\ &\leqslant \sup_{\|x\|=1} \|T_1 x\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2 x\| \\ &= \|T_1\| + \|T_2\|; \end{aligned}$$

$$\|\alpha T\| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha Tx\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = |\alpha| \|T\|.$$

再证完备性。设$\{T_n\}_1^\infty$是一个基本列，则$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists N=N(\varepsilon)$，使得对$\forall\,x\in\mathscr{X}$有

$$\|T_{n+p}x-T_nx\|\leqslant\varepsilon\|x\|\quad(\forall\,n>N,\forall\,p\in\mathbf{N}).$$

于是$T_nx\to y\in\mathscr{Y}(n\to\infty)$。记此$y=Tx$，我们要证$T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$。不难看出$T$是线性的，再证其有界。事实上，$\exists n\in\mathbf{N}$使得

$$\begin{aligned}\|Tx\|=\|y\|&\leqslant\|T_nx\|+1\\&\leqslant(\|T_n\|+1)\|x\|\qquad(\forall\,x\in\mathscr{X},\|x\|=1).\end{aligned}$$

即得$\|T\|\leqslant\|T_n\|+1$。

例2.1.14 设T是有穷维B^*空间$\mathscr{X}$到$\mathscr{Y}$的线性映象，则T必是连续的。

证 T可以通过矩阵(t_{ij})表示出来，而同一个有穷维空间的任意两个模等价。不妨取$\mathscr{X}=\mathbf{K}^n,\mathscr{Y}=\mathbf{K}^m$，便有

$$\begin{aligned}\|Tx\|&=\left(\sum_{i=1}^m\left|\sum_{j=1}^n t_{ij}x_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\left(\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n|t_{ij}|^2\cdot\sum_{j=1}^n|x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\left(\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n|t_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|x\|.\end{aligned}$$

即得$\|Tx\|\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^m\sum\limits_{j=1}^n|t_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|x\|$。

例2.1.15 Hilbert空间$\mathscr{X}$上的正交投影算子。设M是$\mathscr{X}$的一个闭线性子空间，依正交分解定理，$\forall\,x\in\mathscr{X}$，存在唯一的分解$y\in M,z\in M^\perp$，使得

$$x=y+z.$$

对应$x\mapsto y$称作由$\mathscr{X}$到M的正交投影算子，记作P_M。在不强调子空间M时，我们省略M而简记作P。我们来证明P还是一个线性连续算子，并且如果$M\neq\{\theta\}$，那末$\|P\|=1$。

先证线性。设 $x_i = Px_i + z_i (i=1,2)$，其中 $z_i \in M^\perp$。这时，

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = (\alpha_1 Px_1 + \alpha_2 Px_2) + (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) \quad (\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{K}).$$

因为 $\qquad \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 \in M^\perp$，而 $\quad \alpha_1 Px_1 + \alpha_2 Px_2 \in M$。

所以 $\qquad P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Px_1 + \alpha_2 Px_2$。

即得 P 是线性算子。

其次证连续，这是由于 $\|Px\|^2 = \|x\|^2 - \|z\|^2 \leqslant \|x\|^2$。因此，$\|Px\| \leqslant \|x\|$，或者 $\|P\| \leqslant 1$。最后，当 $M \neq \{\theta\}$ 时，任取 $x \in M \setminus \{\theta\}$，便有 $\|Px\| = \|x\|$，从而 $\|P\| = 1$。

习　题

（本节各题中，$\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 均指 Banach 空间）

2.1.1　求证：$T \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 的充要条件是 T 将 $\mathscr{X}$ 中的有界集映为 $\mathscr{Y}$ 中的有界集。

2.1.2　设 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$，求证：

(1) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|$；　　(2) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| < 1} \|Ax\|$。

2.1.3　设 $f \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathbf{R}^1)$，求证：

(1) $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| = 1} f(x)$；　　(2) $\sup\limits_{\|x\| < \delta} f(x) = \delta \|f\| (\forall \delta > 0)$。

2.1.4　设 $y(t) \in C[0,1]$，定义 $C[0,1]$ 上的泛函

$$f(x) = \int_0^1 x(t) y(t) dt \qquad (\forall x \in C[0,1]),$$

求 $\|f\|$。

2.1.5　设 f 是 $\mathscr{X}$ 上的非零线性有界泛函，令 $d = \inf\{\|x\| \mid f(x) = 1\}$，求证：$\|f\| = 1/\|d\|$。

2.1.6　设 $f \in \mathscr{X}^*$，求证：$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathscr{X}$，使得 $f(x_0) = \|f\|$，且 $\|x_0\| < 1 + \varepsilon$。

2.1.7　设 $T: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 是线性的，令

$$N(T) \triangleq \{x \in \mathscr{X} \mid Tx = \theta\}.$$

(1) 若 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$，求证：$N(T)$ 是 $\mathscr{X}$ 的闭线性子空间。

(2) 问 $N(T)$ 是 $\mathscr{X}$ 的闭线性子空间能否推出 $T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$？

(3) 若 f 是线性泛函，求证：

$$f\in\mathscr{X}^*\Longleftrightarrow N(f)\text{ 是闭线性子空间。}$$

2.1.8 设 f 是 $\mathscr{X}$ 上的线性泛函，记

$$H_f^\lambda\triangleq\{x\in\mathscr{X}\mid f(x)=\lambda\}\qquad(\forall\lambda\in\mathbf{K}).$$

如果 $f\in\mathscr{X}^*$，并且 $\|f\|=1$，求证：

(1) $|f(x)|=\inf\{\|x-z\|\mid\forall z\in H_f^0\}(\forall x\in\mathscr{X})$；

(2) $\forall\lambda\in\mathbf{K}$，$H_f^\lambda$ 上的任一点 x 到 H_f^0 的距离都等于 $|\lambda|$。并对 $\mathscr{X}=\mathbf{R}^2$，$\mathbf{K}=\mathbf{R}^1$ 情形解释(1)和(2)的几何意义。

2.1.9 设 $\mathscr{X}$ 是实 B^* 空间，f 是 $\mathscr{X}$ 上的非零实值线性泛函，求证：不存在开球 $B(x_0,\delta)$，使得 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $B(x_0,\delta)$ 中的极大值或极小值。

§2 Riesz 定理及其应用

设 $\mathscr{X}$ 是一个 Hilbert 空间，$\forall y\in\mathscr{X}$，如果定义

$$f_y:\ x\mapsto(x,y)\qquad(\forall x\in\mathscr{X}),$$

那末 $f_y\in\mathscr{X}^*$。事实上，

$$|f_y(x)|\leqslant\|y\|\|x\|\qquad(\forall x\in\mathscr{X}).$$

并因此 $\|f_y\|\leqslant\|y\|$。特别若 $y\neq\theta$，取 $x=y$，便有

$$|f_y(y)|=(y,y)=\|y\|^2.$$

总之有 $\|f_y\|=\|y\|$。这个结论反过来也是对的，正是

定理2.2.1(F.Riesz) 设 f 是 Hilbert 空间 $\mathscr{X}$ 上的一个连续线性泛函，则必存在唯一的 $y_f\in\mathscr{X}$，使得

$$f(x)=(x,y_f)\qquad(\forall x\in\mathscr{X}).\tag{2.2.1}$$

启发 在三维空间中，(2.2.1)就是

$$f(\boldsymbol{x})=ax+by+cz=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}\qquad(\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^3).$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$，$\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，要找的 y_f 现在就是 $\boldsymbol{n}$，它是平面 $f(\boldsymbol{x})=0$ 的法线。

证 不妨设 f 不是 0 泛函，考察集合 $M \triangleq \{x \in \mathscr{X} \mid f(x) = 0\}$。由于 f 是连续线性的，则 M 是一个真闭线性子空间，任取 $x_0 \perp M$(由正交分解定理这 x_0 是存在的)。不妨设 $\|x_0\| = 1$，$\mathscr{X}$ 中任意元素 x 可以分解如下：

$$x = \alpha x_0 + y, \tag{2.2.2}$$

其中 $y \in M$，$\alpha = f(x)/f(x_0)$。这是因为当令 $y = x - \alpha x_0$ 时，

$$f(y) = f(x - \alpha x_0) = f(x) - \alpha f(x_0) = 0.$$

在(2.2.2)两边同时与 x_0 作内积，我们得

$$\alpha = (x, x_0).$$

于是
$$f(x) = \alpha f(x_0) = (x, \overline{f(x_0)} x_0).$$

取 $y_f = \overline{f(x_0)} x_0$，这就是我们要求的。

再证唯一性。若 $\exists\, y, y' \in \mathscr{X}$ 满足

$$f(x) = (x, y) = (x, y') \qquad (\forall x \in \mathscr{X}),$$

那末
$$(x, y - y') = 0 \qquad (\forall x \in \mathscr{X}).$$

特别取 $x = y - y'$，就推得 $y = y'$。

注1 这个定理的几何意义如下：线性连续泛函 $f(x)$ 的等值面都是互相平行的超平面(见习题2.1.8)，因此每个向量 x 的泛函值 $f(x)$ 应由 x 的垂直于这些等值面的分量所决定。

注2 我们还知道，$\|f\| = \|y_f\|$。事实上，由(2.2.1)得

$$|f(x)| \leqslant \|y_f\| \|x\| \quad (\forall x \in \mathscr{X}), \quad \text{或} \|f\| \leqslant \|y_f\|.$$

另一方面，取 $x = y_f$，再由(2.2.1)推得 $\|y_f\| \leqslant \|f\|$，即得 $\|f\| = \|y_f\|$。

定理2.2.2 设 $\mathscr{X}$ 是一个 Hilbert 空间，$a(x, y)$ 是 $\mathscr{X}$ 上的共轭双线性函数，并 $\exists\, M > 0$，使得

$$|a(x, y)| \leqslant M \|x\| \|y\| \quad (\forall x, y \in \mathscr{X}).$$

则存在唯一的 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$，使得

$$a(x, y) = (x, Ay) \qquad (\forall x, y \in \mathscr{X}),$$

且
$$\|A\| = \sup_{\substack{(x,y) \in \mathscr{X} \times \mathscr{X} \\ x \neq \theta,\, y \neq \theta}} |a(x, y)| / \|x\| \|y\|. \tag{2.2.3}$$

证 固定 $y\in\mathscr{X}$, $x\mapsto a(x,y)$ 是一个线性连续泛函。由 Riesz 定理，$\exists z=z(y)\in\mathscr{X}$ 使得

$$a(x,y)=(x,z)\,(\forall x\in\mathscr{X}).$$

定义映射 A: $y\mapsto z(y)$，使有 $a(x,y)=(x,Ay)\,(\forall x,y\in\mathscr{X})$。又因为

$$\begin{aligned}(x,A(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2))&=a(x,\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)\\&=\bar{\alpha}_1a(x,y_1)+\bar{\alpha}_2a(x,y_2)\\&=\bar{\alpha}_1(x,Ay_1)+\bar{\alpha}_2(x,Ay_2)\\&=(x,\alpha_1Ay_1+\alpha_2Ay_2)\quad(\forall x,y_1,y_2\in\\&\quad\mathscr{X},\forall\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{K}).\end{aligned}$$

所以 A 是线性的，并且

$$\|Ay\|=\sup_{x\in\mathscr{X}\setminus\{\theta\}}|a(x,y)|/\|x\|\leqslant M\|y\|.$$

即得 $A\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$，并满足(2.2.3)。

应用 1. Laplace 方程 $-\Delta u=f$ 狄氏边值问题的弱解。设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个有界开区域，$f\in L^2(\Omega)$，称实函数 u 是

$$\begin{cases}-\Delta u=f & (\text{在 }\Omega\text{ 内}), \quad (2.2.4)\\ u|\partial\Omega=0 & \quad (2.2.5)\end{cases}$$

的一个弱解是指 $u\in H_0^1(\Omega)$，满足

$$\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v dx=\int_\Omega fvdx\qquad(\forall v\in H_0^1(\Omega)).\tag{2.2.6}$$

这是因为：如果 $u\in C^2(\bar{\Omega})$，并且是(2.2.4)与(2.2.5)的解，那末

$$\int_\Omega-\Delta u\cdot vdx=\int_\Omega fvdx\quad(\forall v\in C^2(\bar{\Omega}),v|_{\partial\Omega}=0).$$

在左边应用 Green 公式得

$$\begin{aligned}\int_\Omega-\Delta u\cdot vdx&=\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla vdx-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}vd\sigma\\&=\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla vdx,\end{aligned}$$

即得

$$\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla vdx=\int_\Omega f\cdot vdx$$

$$(\forall v\in C^2(\Omega),v|_{\partial\Omega}=0).$$

但集合$\{v\in C^2(\Omega)|v|_{\partial\Omega}=0\}$显然在$H_0^1(\Omega)$中稠密，由$u\in H_0^1(\Omega)$以及$f\in L^2(\Omega)$立得

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v dx=\int_\Omega f\cdot v dx(\forall v\in H_0^1(\Omega)).$$

历史上，人们在很长时期内直接求解(2.2.4)与(2.2.5)，但在证明一般存在性结果时遇到很大困难。于是经过近半个世纪的努力，改成先求弱解证其存在唯一，再证其光滑性，这样一种途径成为近代偏微分方程理论的基本手法，也正因为如此泛函分析才成为研究近代偏微分方程理论所必不缺少的工具。

定理2.2.3 $\forall f\in L^2(\Omega)$，方程(2.2.4)的0-Dirichlet问题(即以(2.2.5)为边界条件)弱解存在唯一。

证 存在性。根据Poincare不等式，

$$(u,v)_1\triangleq\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v dx(\forall u,v\in H_0^1(\Omega))$$

是$H_0^1(\Omega)$上的一个内积。而

$$\left|\int_\Omega f\cdot v dx\right|\leqslant\left(\int_\Omega|f|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega|v|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C\|f\|\|v\|_1\qquad(\forall v\in H_0^1(\Omega)),\tag{2.2.7}$$

其中$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_1$分别表示$L^2(\Omega)$与$H_0^1(\Omega)$上的范数。(2.2.7)表明，

$$v\mapsto\int_\Omega f\cdot v dx\qquad(\forall v\in H_0^1(\Omega))$$

是$H_0^1(\Omega)$上的一个线性连续泛函。应用Riesz定理2.2.1，$\exists u_0\in H_0^1(\Omega)$，使得

$$(u_0,v)_1=\int_\Omega\nabla u_0\cdot\nabla v dx=\int_\Omega f v dx\quad(\forall v\in H_0^1(\Omega)).$$

从而 u_0 是一个弱解。

唯一性. 假若 u_0, u_0' 都是弱解，那末

$$(u_0 - u_0', v) = 0 \qquad (\forall v \in H_0^1(\Omega)).$$

即得 $u_0 = u_0'$. ∎

对于非 0-Dirichelet 问题，总是化到 0-Dirichlet 问题去做。给定 $\partial\Omega$ 上的函数g,如果 $\exists u_0 \in C^2(\bar{\Omega})$，使得 $u_0|_{\partial\Omega} = g$，则非齐次边值问题可以化归齐次边值问题. 事实上，设 $f_0 \triangleq -\Delta u_0, v \triangleq u - u_0$。又若 v 是

$$\begin{cases} -\Delta v = f - f_0, & (2.2.8) \\ v|_{\partial\Omega} = 0 & (2.2.9) \end{cases}$$

的弱解，则 u 就是

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

的弱解. 而问题(2.2.8)与(2.2.9)是 0-Dirichlet 问题。

至于哪些函数 g 可以扩张成 $C^2(\bar{\Omega})$函数的边值? 又若 u 是齐次边值问题的弱解，何时它是古典解? 这些问题在偏微分方程式论中给予答复。

2. 变分不等式。

定理2.2.4 设C是 $H_0^1(\Omega)$中的闭凸子集，若 $f \in L^2(\Omega)$,则下列不等式存在唯一解 $u_0^* \in C$:

$$\int_\Omega \nabla u_0^* \cdot \nabla(v - u_0^*)\, dx \geqslant \int_\Omega f \cdot (v - u_0^*) dx \qquad (\forall v \in C). \tag{2.2.10}$$

证 利用 Riesz 定理，$\exists |\, u_0 \in H_0^1(\Omega)$，使得

$$\int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla w dx = \int_\Omega f \cdot w dx \qquad (\forall w \in H_0^1(\Omega)). \tag{2.2.11}$$

因此，不等式(2.2.10)可以化为

$$\int_\Omega \nabla u_0^* \cdot \nabla(v - u_0^*)\, dx \geqslant \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla(v - u_0^*) dx \qquad (\forall v \in C). \tag{2.2.12}$$

进一步将它改写为

$$(u_0^* - u_0, v - u_0^*)_1 \geqslant 0 \qquad (\forall v \in C). \qquad (2.2.13)$$

根据定理1.6.33，不等式(2.2.13)等价于 u_0^* 是 u_0 在 C 上的最佳逼近元，而这是存在唯一的。

注1 本定理可以换成更一般的结果。设 $A=(a_{ij}(x))$ 是一个 $n\times n$ 正定矩阵，适合

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \delta\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 \qquad (\delta>0),$$

其中 $a_{ij}(x)\in C(\bar{\Omega})$，则 $\forall f\in L^2(\Omega)$，$\exists|u^*\in C$ 使得

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_j u^*(x)\partial_i(v(x)-u^*(x))dx$$

$$\geqslant \int_\Omega f(x)(v(x)-u^*(x))dx \qquad (\forall v\in C).$$

注2 若 C 是由一个连续函数 $\psi(x)\in C(\bar{\Omega})$ 给定的：

$$C \triangleq \{v(x)\in H_0^1(\Omega)\,|\,v(x)\leqslant\psi(x)\},$$

则上述变分不等式问题称为障碍问题，这时 u 表示薄膜的位移，f 表示外力，$\psi(x)$ 是一个障碍。

习　题

（本节各题中的 H 均指 Hilbert 空间）

2.2.1 设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 H 上的一组线性有界泛函，

$$M \triangleq \bigcap_{k=1}^n N(f_k), \quad N(f_k)\triangleq\{x\in H\,|\,f_k(x)=0\}$$

$$(k=1,2,\cdots,n).$$

$\forall x_0\in H$，记 y_0 为 x_0 在 M 上的正交投影，求证：$\exists y_1,y_2,\cdots,y_n\in H$ 及 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbf{K}$，使得

$$y_0 = x_0 - \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k.$$

2.2.2　设 l 是 H 上的线性有界泛函，C 是 H 中的一个闭凸子集。又设

$$f(v)=\frac{1}{2}\|v\|^2-l(v)\qquad(\forall v\in C).$$

(1) 求证：$\exists u^*\in H$，使得

$$f(v)=\frac{1}{2}\|u^*-v\|^2-\frac{1}{2}\|u^*\|^2\qquad(\forall v\in C);$$

(2) 求证：$\exists|u_0\in C$，使得 $f(u_0)=\inf\limits_{v\in C}f(v)$。

2.2.3　设 H 的元素是定义在集合 S 上的复值函数。又若 $\forall x\in S$，由

$$J_x(f)=f(x)\qquad(\forall f\in H),$$

定义的映射 J_x：$H\to\mathbb{C}$ 是 H 上的线性连续泛函。求证：存在 $S\times S$ 上的复值函数 $K(x,y)$，适合条件：

(1) 对任意固定的 $y\in S$，作为 x 的函数有 $K(x,y)\in H$；

(2) $f(y)=(f,K(\cdot,y))(\forall f\in H,\forall y\in S)$。

注　满足条件(1)与(2)的函数 $K(x,y)$ 称为 H 的再生核。

2.2.4　求证：$H^2(D)$(定义见例1.6.28)的再生核为

$$K(z,w)=\frac{1}{\pi(1-z\bar{w})^2}\qquad(z,w\in D).$$

2.2.5　设 L,M 是 H 上的闭线性子空间，求证：

(1) $L\perp M\Longleftrightarrow P_LP_M=0$；

(2) $L=M^\perp\Longleftrightarrow P_L+P_M=I$；

(3) $P_LP_M=P_{L\cap M}\Longleftrightarrow P_LP_M=P_MP_L$。

§3　纲与开映象定理

有一大类解方程的问题从泛函分析上看就是对给定的算子 T：$\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$，求 $x\in\mathscr{X}$，使得

$$Tx=y.\tag{2.3.1}$$

解的存在性表达成算子T有右逆T_r^{-1}：

$$TT_r^{-1}=I \quad (I\text{ 表示恒同算子}).$$

因为若令$x=T_r^{-1}y$，则有$Tx=TT_r^{-1}y=y$；而解的唯一性表达成算子T有左逆T_l^{-1}：

$$T_l^{-1}T=I.$$

因为由$Tx=y$及T_l^{-1}存在便推得$x=T_l^{-1}Tx=T_l^{-1}y$，所以解x唯一地被y决定。因此为了解存在而且唯一，必须且仅须线性算子T既有左逆又有右逆。又因为，如果算子T左右逆同时存在，那末它们一定是相等的。事实上，

$$T_l^{-1}=T_l^{-1}I=T_l^{-1}(TT_r^{-1})=(T_l^{-1}T)T_r^{-1}=IT_r^{-1}=T_r^{-1}.$$

所以这时称算子T有逆，并记此逆为T^{-1}。

若$\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$都具有拓扑结构，又若方程(2.3.1)的解是存在唯一的。我们还要问什么时候方程的解是稳定的？所谓稳定是指当y做微小变化时，对应的解x也作微小变化，即映象T^{-1}是连续的，我们知道：一个映象T称为是连续的，是指开集U在T作用下的原象$T^{-1}(U)$是开的、那么为了T^{-1}是连续的，就是指：T映开集U为开集$T(U)$。为了不涉及T^{-1}的存在性，称映象T：$\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$是开映象，如果它映开集为开集。

3.1 纲与纲推理

与定义1.2.2的稠密概念相联系，引入疏集的概念。

定义2.3.1 设$(\mathscr{X},\rho)$是一个度量空间，集$E\subset\mathscr{X}$，称E是疏的，如果$\bar{E}$的内点是空的。

例2.3.2 在$\mathbf{R}^n$上，有穷点集是疏集。Cantor集是疏集。

命题2.3.3 设$(\mathscr{X},\rho)$是一度量空间。为了$E\subset\mathscr{X}$是疏集必须且仅须：$\forall$球$B(x_0,r_0)$，$\exists B(x_1,r_1)\subset B(x_0,r_0)$，使得

$$\bar{E}\cap\bar{B}(x_1,r_1)=\varnothing.$$

证 必要性。因为$\bar{E}$无内点，所以$\bar{E}$不能包含任一球$B(x_0,r_0)$。从而$\exists x_1\in B(x_0,r_0)$，使得$x_1\notin\bar{E}$。又由$\bar{E}$闭，所以$\exists\varepsilon_1>0$，使得$\bar{B}(x_1,\varepsilon_1)\cap\bar{E}=\varnothing$。取

$$0<r_1<\min(\varepsilon_1, r_0-\rho(x_0,x_1)),$$

便有 $B(x_1,r_1)\subset B(x_0,r_0)$, $\bar{B}(x_1,r_1)\cap\bar{E}=\varnothing$。

充分性。若 E 不疏，即 $\bar{E}$ 有内点，则 $\exists B(x_0,r_0)\subset\bar{E}$。但由假设

$$\exists B(x_1,r_1)\subset B(x_0,r_0), \text{使得 } \bar{B}(x_1,r_1)\cap\bar{E}=\varnothing,$$

一方面有 $B(x_1,r_1)\cap\bar{E}=B(x_1,r_1)$；另一方面有 $B(x_1,r_1)\cap\bar{E}=\varnothing$。即得矛盾。

定义2.3.4 在距离空间$(\mathscr{X},\rho)$上，集合 E 称为是第一纲的，如果 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，其中 E_n 是疏集。不是第一纲的集合称为第二纲集。

例2.3.5 在$\mathbb{R}^1$上，有理点集是第一纲集。更一般地，可数点集总是第一纲集。

定理2.3.6(Baire) 完备度量空间$(\mathscr{X},\rho)$是第二纲集。

证 用反证法。倘若$\mathscr{X}$是第一纲集，即存在疏集$\{E_n\}$，使得

$$\mathscr{X}=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n. \tag{2.3.2}$$

对任意的球 $B(x_0,r_0)$，$\exists B(x_1,r_1)\subset B(x_0,r_0)$ $(r_1<1)$，使得

$$\bar{B}(x_1,r_1)\cap\bar{E}_1=\varnothing;$$

对 $B(x_1,r_1)$，$\exists B(x_2,r_2)\subset B(x_1,r_1)$ $(r_2<1/2)$，使得

$$\bar{B}(x_2,r_2)\cap(\bar{E}_1\cup\bar{E}_2)=\varnothing;$$

如此继续下去，对 $B(x_{n-1},r_{n-1})$，$\exists B(x_n,r_n)\subset B(x_{n-1},r_{n-1})$ $(r_n<1/n)$，使得 $\bar{B}(x_n,r_n)\cap\bar{E}_n=\varnothing$，从而

$$\bar{B}(x_n,r_n)\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}\bar{E}_i\right)=\varnothing \qquad (\forall n\in\mathbf{N}); \tag{2.3.3}$$

……………………………………………………

于是我们得到

$$\bar{B}(x_0,r_0)\supset\bar{B}(x_1,r_1)\supset\cdots\supset\bar{B}(x_n,r_n)\supset\cdots$$

而
$$\rho(x_{n+p},x_n)\leqslant r_n<\frac{1}{n}\qquad(\forall n,p\in\mathbf{N}).\qquad(2.3.4)$$

由此可见$\{x_n\}$是基本列，从而$\exists x\in\mathscr{X}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$。另一方面在(2.3.4)中令$p\to\infty$得$\rho(x,x_n)\leqslant r_n$，从而

$$x\in\bar{B}(x_n,r_n)\qquad(\forall n\in\mathbf{N}).\qquad(2.3.5)$$

联合(2.3.3)与(2.3.5)便有$x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，这与(2.3.2)矛盾。

应用 在数学分析课程中，许多人曾为Weierstrass构造出一个处处连续而处处不可微的函数而感到惊异，然而我们却有下列更为令人吃惊的事实：

定理 在$C[0,1]$中处处不可微的函数集合E是非空的，更确切地，E的余集是第一纲集。

证 取$\mathscr{X}=C[0,1]$，设A_n表示$\mathscr{X}$中这样一些元素f之集：对f，$\exists s\in[0,1]$，使对适合$0\leqslant s+h\leqslant 1$与$|h|\leqslant 1/n$的任何$h$，下式成立

$$\left|\frac{f(s+h)-f(s)}{h}\right|\leqslant n.$$

若f在某个点s处可微，则必有正整数n，使得$f\in A_n$。于是

$$\mathscr{X}\backslash E=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n.\qquad(2.3.6)$$

下面我们证明每个A_n是疏集、为此先证A_n是闭的。事实上，若$f\in\mathscr{X}\backslash A_n$，则$\forall s\in[0,1]$，$\exists h_s$，使得

$$|h_s|\leqslant\frac{1}{n},\quad 且\ |f(s+h_s)-f(s)|>n|h_s|.$$

又由f的连续性，$\exists\varepsilon_s>0$，以及s的某个适当的邻域J_s，使得对$\forall\sigma\in J_s$有

$$|f(\sigma+h_s)-f(\sigma)|>n|h_s|+2\varepsilon_s.\qquad(2.3.7)$$

根据有限覆盖定理，可设$J_{s_1},J_{s_2},\cdots,J_{s_m}$覆盖$[0,1]$，并设

$$\varepsilon=\min\{\varepsilon_{s_1},\varepsilon_{s_2},\cdots,\varepsilon_{s_m}\}.$$

今若$g\in\mathscr{X}$适合$\|g-f\|<\varepsilon$，则由(2.3.7)，对$\forall\sigma\in J_{s_k}$ $(k=1,2,\cdots,m)$有

$$|g(\sigma+h_{s_k})-g(\sigma)|\geqslant|f(\sigma+h_{s_k})-f(\sigma)|-2\varepsilon>n|h_{s_k}|.$$

这证明了$\mathscr{X}\backslash A_n$是开集，从而$A_n$是闭集。

再证A_n没有内点。$\forall f\in A_n,\forall\varepsilon>0$，由Weierstrass逼近定理，存在多项式$p$，使得

$$\|f-p\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

p的导数在$[0,1]$上是有界的，因此根据中值定理$\exists M>0$，使得对$\forall s\in[0,1]$及$|h|<1/n$，成立着

$$|p(s+h)-p(s)|\leqslant M|h|.$$

设$g(s)\in C[0,1]$是一个分段线性函数，满足$\|g\|<\varepsilon/2$，并且各条线段斜率的绝对值都大于$M+n$，那末

$$p+g\in B(f,\varepsilon),\quad 而\ p+g\bar{\in}A_n.$$

这样，我们证明了每个A_n是疏集，从而$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$是第一纲集。而$\mathscr{X}$是完备的，由Baire定理$\mathscr{X}$是第二纲集，由此根据(2.3.6)，$E$也是第二纲集。❙

本定理表明，处处连续而又处处不可微的函数是非常之多的。

3.2 开映象定理

设$\mathscr{X},\mathscr{Y}$都是B^*空间，$T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，算子$T$称为是单射，是指$T$是1-1的，算子$T$称为是满射，是指$T(\mathscr{X})=\mathscr{Y}$。

如果T是一个单射，那么可以定义T^{-1}，它是线性的，但其定义域却未必是全空间$\mathscr{Y}$。仅当它还是一个满射时，T^{-1}才是$\mathscr{Y}$

到$\mathscr{X}$的一个线性算子。这时，我们自然要问，T^{-1}是不是连续的？下面的 Banach 逆算子定理回答了这一问题。

定理2.3.7(Banach) 设$\mathscr{X}$,$\mathscr{Y}$是B空间。若$T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，它既是单射又是满射。那末$T^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{Y},\mathscr{X})$。

这定理有一个更一般的形式就是

定理2.3.8(开映象定理) 设$\mathscr{X}$,$\mathscr{Y}$都是B空间，若$T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$是一个满射，则$T$是开映象。

证 用$B(x_0,a)$,$U(y_0,b)$分别表示$\mathscr{X}$,$\mathscr{Y}$中的开球。

(1) 为了证明T是开映射，即$\forall$开集W，$T(W)$是开集，必须且仅须证明：$\exists\,\delta>0$，使得

$$TB(\theta,1)\supset U(\theta,\delta). \tag{2.3.8}$$

事实上，必要性是显然的。下证其充分性。由于T的线性，条件(2.3.8)等价于

$$TB(x_0,r)\supset U(Tx_0,r\delta) \qquad (\forall\,x_0\in\mathscr{X},\ \forall\,r>0).$$

$\forall\,y_0\in T(W)$，按定义$\exists\,x_0\in W$，使得$y_0=Tx_0$。因为W是开集，所以$\exists\,B(x_0,r)\subset W$。于是取$\varepsilon=r\delta$，便有

$$U(Tx_0,\varepsilon)\subset TB(x_0,r)\subset T(W).$$

即$y_0=Tx_0$是$T(W)$的内点(参看图2.3.1)。

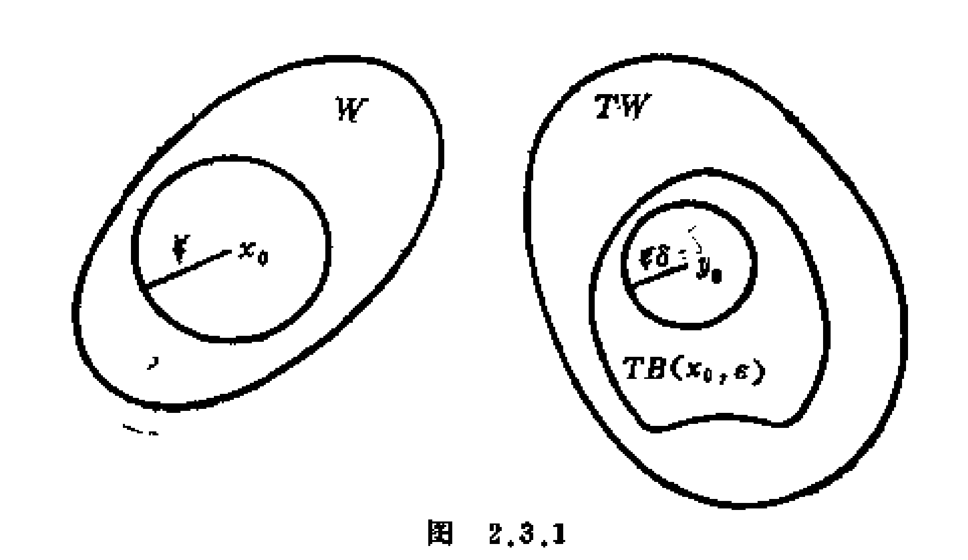


图 2.3.1

(2) 证明：$\exists\,\delta>0$，使得$T\overline{B(\theta,1)}\supset U(\theta,3\delta)$。这因为

$$\mathscr{Y}=T\mathscr{X}=\bigcup_{n=1}^{\infty}TB(\theta,n),$$

而$\mathscr{Y}$是完备的，所以至少有一个$n\in\mathbf{N}$，使得$TB(\theta,n)$非疏。即$\overline{TB(\theta,n)}$至少含有一个内点。从而$\exists U(y_0,r)\subset\overline{TB(\theta,n)}$，注意到$TB(\theta,n)$是一个对称凸集，便有$U(-y_0,r)\subset\overline{TB(\theta,n)}$，从而(参看图2.3.2)

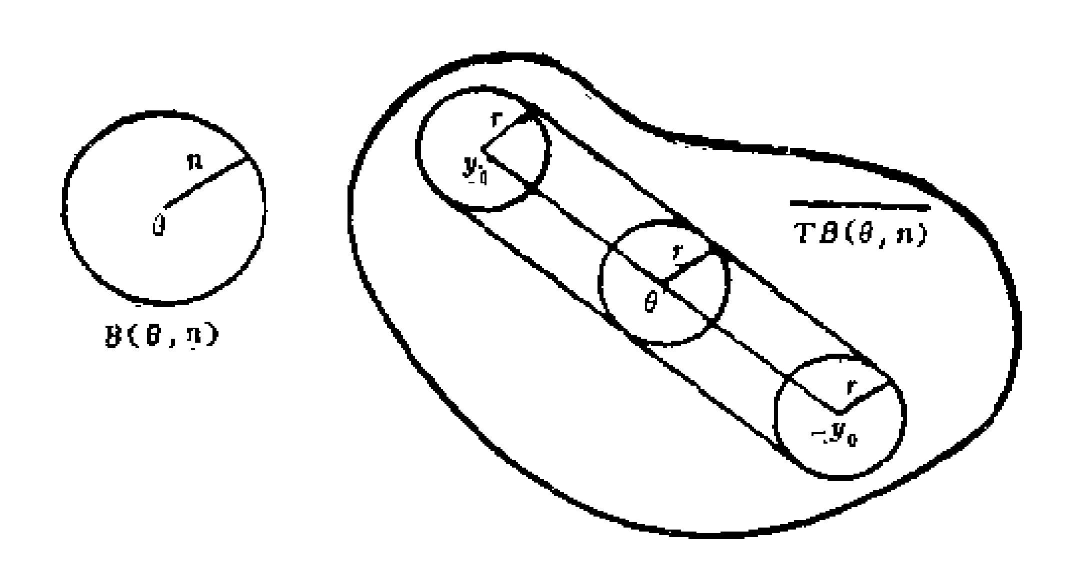


图 2.3.2

$$U(\theta,r)\subset\frac{1}{2}U(y_0,r)+\frac{1}{2}U(-y_0,r)\subset\overline{TB(\theta,n)}.$$

由T的齐次性，取$\delta=r/3n$，便有$\overline{TB(\theta,1)}\supset U(\theta,3\delta)$.

(3) 证明：$TB(\theta,1)\supset U(\theta,\delta)$. $\forall y_0\in U(\theta,\delta)$，要证$\exists x_0\in B(\theta,1)$，使得$Tx_0=y_0$，即求方程$Tx=y_0$在$B(\theta,1)$内的一个解$x_0$，我们用逐次逼近法.

对$y_0\in U(\theta,\delta)$，按(2)，$\exists x_1\in B\left(\theta,\frac{1}{3}\right)$,使得

$$\|y_0-Tx_1\|<\frac{\delta}{3};$$

对 $y=y_0-Tx_1\in U\left(\theta,\frac{\delta}{3}\right)$，按(2)，$\exists x_2\in B\left(\theta,\frac{1}{3^2}\right)$，使得

$$\|y_1-Tx_2\|<\frac{\delta}{3^2};$$

……………………………

对 $y_n=y_{n-1}-Tx_n\in U\left(\theta,\frac{\delta}{3^n}\right)$，按(2)，$\exists x_{n+1}\in B\left(\theta,\frac{1}{3^{n+1}}\right)$，使得

$$\|y_n-Tx_{n+1}\|<\frac{\delta}{3^{n+1}};$$

……………………………

于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|\leqslant 1/2$，令 $x_0\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}x_n$，便有 $x_0\in B(\theta,1)$。而

$$\begin{aligned}\|y_n\|&=\|y_{n-1}-Tx_n\|=\cdots\\&=\|y_0-T(x_1+x_2+\cdots+x_n)\|<\frac{\delta}{3^n}\quad(\forall n\in\mathbb{N}).\end{aligned}$$

即得
$$S_n\triangleq\sum_{i=1}^{n}x_i\to x_0,\quad TS_n\to y_0\quad(n\to\infty).\tag{2.3.9}$$

又因为 T 是连续的，所以

$$Tx_0=y_0.\tag{2.3.10}$$

即得 $U(\theta,\delta)\subset TB(\theta,1)$。

定理2.3.7的证明 依定理2.3.8证明中的第(3)段，已知

$$U(\theta,1)\subset TB\left(\theta,\frac{1}{\delta}\right).$$

即
$$T^{-1}U(\theta,1)\subset B\left(\theta,\frac{1}{\delta}\right)\quad 或\quad \|T^{-1}y\|<\frac{1}{\delta}$$

$$(\forall y\in\mathscr{Y},\quad \|y\|<1).$$

特别地由模的齐次性，$\forall y\in\mathscr{Y}$，$\forall\varepsilon>0$，有

$$\|T^{-1}y\| < \frac{(1+\varepsilon)}{\delta}\|y\|.$$

令 $\varepsilon \to 0$ 得

$$\|T^{-1}y\| \leqslant \frac{1}{\delta}\|y\| \qquad (\forall y \in \mathscr{Y}).$$

从而 $T^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}, \mathscr{X})$。

注1 定理2.3.7与定理2.3.8中的Banach空间$\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$可以换成更一般的F空间，但证明需作稍稍修改。参看关肇直，张恭庆，冯德兴著的《线性泛函分析入门》(第二章§2)。

注2 在定理2.3.7中，$T\mathscr{X}$是第二纲集的假设是不可少的(满射及$\mathscr{Y}$的完备性保证了这一点)。因为有例子，取$\mathscr{X} = \mathscr{Y} = C[0,1]$，规定

$$(Tx)(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau \qquad (\forall x \in \mathscr{X}).$$

它显然是连续线性的，但$T\mathscr{X} = \mathscr{Y}_0 = \{y \in C^1[0,1] \mid y(0) = 0\}$不是$C[0,1]$的第二纲集。这时$T^{-1} = \frac{d}{dt}$在$C[0,1]$中不是连续的(即使以$C[0,1]$中的一个子集$\mathscr{Y}_0$作为$T^{-1}$的定义域，也不连续)。事实上，$x_n(t) \triangleq \sin n\pi t$，显然$\|x_n\| = 1$，但是

$$\left\|\frac{d}{dt}x_n(t)\right\| = n\pi\|\cos n\pi t\| = n\pi \to \infty \quad (当\ n \to \infty).$$

其中$\|\cdot\|$表示$C[0,1]$空间中的模。然而，若$\mathscr{Y}_0$按$C^1[0,1]$的模$\|\cdot\|_1$则构成B空间，这时$T^{-1} = \frac{d}{dt}$是有界的。事实上，

$$\|T^{-1}y\| = \left\|\frac{d}{dt}y(t)\right\| \leqslant \|y\|_1 \qquad (\forall y \in \mathscr{Y}_0).$$

分析定理2.3.7与2.3.8的证明过程，可以看出，线性算子T连续性的假设可以减弱。事实上，用到连续性之处在于由

(2.3.9)推出(2.3.10)，而这只需要T是如下定义的闭算子就够了。

定义2.3.9 设T是$\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$的线性算子，$D(T)$是其定义域。称$T$是闭的，是指由$x_n\in D(T)$，$x_n\to x$，以及$Tx_n\to y$就能推出$x\in D(T)$，而且$y=Tx$。

例2.3.10 在$C[0,1]$上，$D(T)=C^1[0,1]$，$T=\dfrac{d}{dt}$是一个闭线性算子。

证 如果$x_n(t)\in C^1[0,1]$，并且有$x_n\to x(C[0,1])$，$\dfrac{dx_n}{dt}\to y(C[0,1])$，则有

$$x_n(t)-x_n(0)\to\int_0^t y(\tau)d\tau \qquad (\forall t\in[0,1]),$$

$$x_n(t)-x_n(0)\to x(t)-x(0) \quad (\forall t\in[0,1]).$$

即得
$$x(t)=x(0)+\int_0^t y(\tau)d\tau \qquad (\forall t\in[0,1]).$$

因此，$x\in C^1[0,1]$，且$\dfrac{dx}{dt}=y(t)$。 ▌

如果T是闭线性算子，在定理2.3.7与2.3.8证明过程中，一开始取空间$\mathscr{X}_0$就是$D(T)$，它未必完备(但是是B^*空间)。到第(3)段，我们找到基本列S_n，满足$TS_n\to y_0$。这时利用$\mathscr{X}$的完备性推出$\exists x_0\in\mathscr{X}$，使得$S_n\to x_0$，再由$T$的闭性推出$x_0\in D(T)$，$y_0=Tx_0$。于是得到更一般的结论：

定理2.3.11 若$\mathscr{X},\mathscr{Y}$是B空间，T是$\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$的一个闭线性算子，满足$R(T)$是$\mathscr{Y}$中的第二纲集，则$R(T)=\mathscr{Y}$并且$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得$\forall y\in\mathscr{Y}$，$\|y\|<\delta$必有$x\in D(T)$，适合$\|x\|<\varepsilon$且$y=Tx$。

证 只有$R(T)=\mathscr{Y}$是需要证的。我们已知对$\varepsilon=1$，$\exists\delta>0$使得

$$U(\theta,\delta)\subset T\{B(\theta,1)\cap D(T)\}. \tag{2.3.11}$$

$\forall y\in\mathscr{Y}$, 不妨设 $y\neq\theta$(显然 $\theta\in R(T)$)。 $\forall 0<\delta_1<\delta$, 按(2.3.11),

$$\frac{\delta_1 y}{\|y\|}\in U(\theta,\delta)\Rightarrow\frac{\delta_1 y}{\|y\|}\in T\{B(\theta,1)\cap D(T)\}.$$

于是 $\exists x\in B(\theta,1)\cap D(T)$, 使得

$$\frac{\delta_1 y}{\|y\|}=Tx\Rightarrow y=T\left(\frac{\|y\|}{\delta_1}x\right)\Rightarrow y\in R(T).$$

3.3 闭图象定理

对于线性算子而言，我们来看连续性与闭性间的关系。我们说一个连续线性算子 $T: D(T)\to\mathscr{Y}$ 总可以延拓到 $\overline{D(T)}$ 上，这是下列

定理2.3.12(B.L.T) 设 T 是 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 到 B 空间 $\mathscr{Y}$ 的连续线性算子，那末 T 能唯一地延拓到 $\overline{D(T)}$ 上成为连续线性算子 T_1，使得 $T_1|_{D(T)}=T$，且 $\|T_1\|=\|T\|$。

证 任取 $x\in\overline{D(T)}$，$\exists x_n\in D(T)$，$\lim x_n=x$，依假设 T 在 $D(T)$ 上连续，从而有界，即 $\exists M>0$，使得

$$\|Tx\|\leqslant M\|x\| \qquad (\forall x\in D(T)).$$

于是
$$\|Tx_{n+p}-Tx_n\|\leqslant M\|x_{n+p}-x_n\|.$$

由此可见 $\{Tx_n\}$ 是 $\mathscr{Y}$ 中的基本列，已设 $\mathscr{Y}$ 完备，所以 $\exists y\in\mathscr{Y}$，使得 $Tx_n\to y$。不难看出 y 仅依赖于 x，而与 $D(T)$ 中 x_n 的选择无关。因此，可以定义 $T_1: x\mapsto y$。容易验证 T_1 是线性的，还有 $T_1|_{D(T)}=T$，并且 $\|T_1x\|\leqslant M\|x\|$ $(\forall x\in\overline{D(T)})$。 ▌

在这个意义上，我们把每个连续线性算子 T 都看成是有闭定义域的。于是每个连续线性算子必是闭的。可是一般闭线性算子未必能延拓到 $\overline{D(T)}$ 上使其仍闭。

推论2.3.13(等价范数定理) 设线性空间 $\mathscr{X}$ 上有两个模 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$。如果 $\mathscr{X}$ 关于这两个模都构成 B 空间，而且 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强，则 $\|\cdot\|_2$ 与 $\|\cdot\|_1$ 必等价。

证 考察恒同映射 $I: \mathscr{X}\to\mathscr{X}$，把它看成是由$(\mathscr{X},\|\cdot\|_2)\to(\mathscr{X},\|\cdot\|_1)$的线性算子，由假设$\|\cdot\|_2$比$\|\cdot\|_1$强，即$\exists C>0$，使得

$$\|Ix\|_1\leqslant C\|x\|_2 \qquad (\forall x\in\mathscr{X}).$$

因此I是连续的，它既是单射又是满射。依定理2.3.7，I可逆且I^{-1}连续，即有$M>0$，使

$$\|I^{-1}x\|_2\leqslant M\|x\|_1 \qquad (\forall x\in\mathscr{X}).$$

又因$I^{-1}x$与x是同一个元素，所以$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$等价。

定理2.3.14(闭图象定理) 设$\mathscr{X},\mathscr{Y}$是B空间。若T是$\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$的闭线性算子，并且$D(T)$是闭的，则$T$是连续的。

证 因为$D(T)$是闭的，所以$D(T)$作为$\mathscr{X}$的线性子空间可看成是B空间。在$D(T)$上，引进另外一个范数$\|\cdot\|_G$如下：

$$\|x\|_G=\|x\|+\|Tx\| \qquad (\forall x\in D(T)).$$

现在证明$(D(T),\|\cdot\|_G)$也是B空间，事实上，从

$$\|x_n-x_m\|_G=\|x_n-x_m\|+\|Tx_n-Tx_m\|\to 0$$
$$(\text{当 } n,m\to\infty),$$

可知$\exists x^*\in\mathscr{X}$与$y^*\in\mathscr{Y}$，使得$x_n\to x^*$，且$Tx_n\to y^*$。根据$T$的闭性即得$y^*=Tx^*$，从而$Tx_n\to Tx^*$。因此$\|x_n-x^*\|_G\to 0$。又显然有$\|\cdot\|_G$比$\|\cdot\|$强，根据等价范数定理$\|\cdot\|_G$与$\|\cdot\|$等价，故$\exists M>0$，使得

$$\|Tx\|\leqslant\|x\|_G\leqslant M\|x\| \qquad (\forall x\in D(T)).$$

注 集合$G(T)\triangleq\{(x,Tx)\mid x\in D(T)\}$称为算子$T$的图象，而$\|x\|_G$实际上是$(x,Tx)$在乘积空间$\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$上的模，因此$\|\cdot\|_G$称为图模。算子$T$是闭的，实际上就是$G(T)$按图模是闭的。

3.4 **共鸣定理**

定理2.3.15(共鸣定理或一致有界定理) 设$\mathscr{X}$是B空间，$\mathscr{Y}$是B^*空间，如果

$$W\subset\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})，\text{使得}\sup_{A\in W}\|Ax\|<\infty \quad (\forall x\in\mathscr{X}),$$

那末存在常数M，使得$\|A\|\leqslant M(\forall A\in W)$。

证 $\forall x\in\mathscr{X}$，定义

$$\|x\|_W=\|x\|+\sup_{A\in W}\|Ax\|.$$

显然，$\|\cdot\|_W$是$\mathscr{X}$上的范数，且强于$\|\cdot\|$。下面证明$(\mathscr{X},\|\cdot\|_W)$完备。事实上，如果

$$\|x_m-x_n\|+\sup_{A\in W}\|A(x_m-x_n)\|\to 0\qquad(当\ m,n\to\infty).$$

由$\mathscr{X}$的完备性，$\exists x\in\mathscr{X}$，使得$\|x_n-x\|\to 0$(当$n\to\infty$)，又因为$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=N(\varepsilon)$，使得

$$\sup_{A\in W}\|Ax_m-Ax_n\|<\varepsilon\qquad(\forall m,n\geqslant N).$$

从而对$\forall A\in W$有 $\|Ax_n-Ax\|\leqslant\varepsilon(\forall n\geqslant N)$。于是

$$\|x_n-x\|+\sup_{A\in W}\|A(x_n-x)\|\to 0\qquad(当\ n\to\infty),$$

即$\|x_n-x\|_W\to 0$。再根据等价范数定理，$\|\cdot\|_W$与$\|\cdot\|$等价，从而$\exists$常数M，使得

$$\sup_{A\in W}\|Ax\|\leqslant M\|x\|\qquad(\forall x\in\mathscr{X}).$$

由此立即推出$\|A\|\leqslant M(\forall A\in W)$。

注 条件：$\forall x\in\mathscr{X}$，$\sup\limits_{A\in W}\|Ax\|<\infty$，意味着$\forall x\in\mathscr{X}$，$\exists M_x>0$，使得

$$\|Ax\|\leqslant M_x\|x\|\qquad(\forall A\in W).\qquad(2.3.12)$$

而结论：$\|A\|\leqslant M(\forall A\in W)$，则可看作是，存在与$x$无关的常数$M$，使得

$$\|Ax\|\leqslant M\|x\|\qquad(\forall A\in W).\qquad(2.3.13)$$

(2.3.12)意味着算子族W点点有界；(2.3.13)则意味着算子族W一致有界。因此本定理给出条件保证点点有界蕴含一致有界，故称“一致有界”定理。另一方面，如果我们从反面来叙述本定理将有：

$$\sup_{A\in W}\|A\|=\infty\Rightarrow\exists x_0\in\mathscr{X},使得\sup_{A\in W}\|Ax_0\|=\infty.$$

因此本定理又有“共鸣定理”之称。

定理2.3.16(Banach-Steinhaus定理) 设$\mathscr{X}$,$\mathscr{Y}$是B空间,M是$\mathscr{X}$的某个稠密子集。若$A_n(n=1,2,\cdots)$, $A\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$,则$\forall x\in\mathscr{X}$都有

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax \tag{2.3.14}$$

的充分且必要条件是:

(1) $\|A_n\|$有界;

(2) (2.3.14)对$\forall x\in M$成立。

证 必要性。根据共鸣定理是显然的。

充分性。假定$\|A_n\|\leqslant C(\forall n\in\mathbf{N})$,对$\forall x\in\mathscr{X}$及$\forall \varepsilon>0$,取$y\in M$,使得

$$\|x-y\|\leqslant\frac{\varepsilon}{4(\|A\|+c)},$$

便有
$$\|A_n x-Ax\|\leqslant\|A_n x-A_n y\|+\|A_n y-Ay\|+\|Ax-Ay\|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\|A_n y-Ay\| \qquad (\forall n\in\mathbf{N}).$$

再取N足够大,使得$\|A_n y-Ay\|<\varepsilon/2(\forall n\geqslant N)$,便有

$$\|A_n x-Ax\|<\varepsilon \qquad (\forall n\geqslant N).$$

3.5 应用

1. Lax-Milgram 定理。

定理2.3.17(Lax-Milgram定理) 设$a(x,y)$是Hilbert空间$\mathscr{X}$上的一个共轭双线性函数,满足:

(1) $\exists M>0$,使$|a(x,y)|\leqslant M\|x\|\|y\|(\forall x,y\in\mathscr{X})$;

$$\tag{2.3.15}$$

(2) $\exists\delta>0$,使$|a(x,x)|\geqslant\delta\|x\|^2(\forall x\in\mathscr{X})$, (2.3.16)

那末必存在唯一的有连续逆的连续线性算子$A\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$,满足

$$a(x,y)=(x,Ay) \qquad (\forall x,y\in\mathscr{X}), \tag{2.3.17}$$

$$\|A^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\delta}. \tag{2.3.18}$$

证 依定理2.2.2，适合(2.3.17)的算子 $A\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$存在唯一。今证其

(1) 是单射。若有 $y_1, y_2\in\mathscr{X}$，满足 $Ay_1=Ay_2$，则

$$a(x,y_1)=a(x,y_2) \qquad (\forall\, y\in\mathscr{X}),$$

从而

$$a(x,y_1-y_2)=0 \qquad (\forall\, x\in\mathscr{X}).$$

特别取 $x=y_1-y_2$，由(2.3.16)即得 $y_1=y_2$。

(2) 是满射。先证 $R(A)$是闭的。事实上，$\forall\, w\in\overline{R}(A)$，$\exists\, v_n\in\mathscr{X}(n=1,2,\cdots)$，使得

$$w=\lim_{n\to\infty}Av_n. \tag{2.3.19}$$

由(2.3.16)，

$$\begin{aligned}\delta\|v_{n+p}-v_n\|^2&\leqslant|a(v_{n+p}-v_n,v_{n+p}-v_n)|\\&=|(v_{n+p}-v_n,A(v_{n+p}-v_n))|\\&\leqslant\|v_{n+p}-v_n\|\|Av_{n+p}-Av_n\| \qquad (\forall\, n,p\in\mathbf{N}),\end{aligned}$$

即得

$$\|v_{n+p}-v_n\|\leqslant\frac{1}{\delta}\|Av_{n+p}-Av_n\|\to0$$
$$(\text{当 } n\to\infty,\ \forall\, p\in\mathbf{N}).$$

从而$\{v_n\}$是基本列，因此$\exists\, v^*\in\mathscr{X}$，使得 $v_n\to v^*$，并由A的连续性和(2.3.19)得 $W=Av^*$，即 $w\in R(A)$。于是 $R(A)$闭。

再证 $R(A)^\perp=\{\theta\}$，倘若 $w\in R(A)^\perp$，则

$$(w,Av)=0 \qquad (\forall\, v\in\mathscr{X}),$$

即 $a(w,v)=0(\forall\, v\in\mathscr{X})$。特别取 $v=w$，再利用假设(2.3.16)有

$$\delta\|w\|^2\leqslant|a(w,w)|=0,$$

即得 $w=\theta$。由此可见A是满射的。

(3) 再利用 Banach 逆算子定理，$A^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$。因为

$$\delta\|x\|^2\leqslant|a(x,x)|=|(x,Ax)|\leqslant\|x\|\cdot\|Ax\|,$$

所以 $\delta\|x\|\leqslant\|Ax\|(\forall\, x\in\mathscr{X})$，即得(2.3.18)。

2. Lax 等价定理．在数值分析中，为了求一个方程的解，往往用求一个近似方程的解去代替．例如用差分方程或有限元方程近似代替微分方程．其首要问题便是：近似方程的解是否收敛到原方程的解？若是，则称这近似格式具有**收敛性**。

用泛函分析的语言描述，设$T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，其中$\mathscr{X},\mathscr{Y}$是$B$空间．给定$y\in\mathscr{Y}$，求解$x\in\mathscr{X}$，使得

$$Tx=y. \tag{2.3.20}$$

首先我们应当假定，$\forall y\in\mathscr{Y}$，$\exists| x\in\mathscr{X}$满足(2.3.20)．这时，应用定理2.3.7，便有$T^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{Y},\mathscr{X})$．现在来考虑(2.3.20)的近似方程．$\forall n\in\mathbf{N}$，设$T_n\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，求解$x_n\in\mathscr{X}$，使得

$$T_nx_n=y. \tag{2.3.21}$$

当然，还是要假定$\forall y\in\mathscr{Y}$，$\exists| x_n\in\mathscr{X}$满足(2.3.21)，于是有$T_n^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{Y},\mathscr{X})$．

何谓T_n是T的近似？它是指：$\forall x\in\mathscr{X}$，

$$\|Tx-T_nx\|\to 0\qquad(\text{当 } n\to\infty) \tag{2.3.22}$$

这在数值分析中，称为近似格式具有**相容性**．

在数值分析中，还有一个重要的概念：称近似格式具有**稳定性**，是指$\exists C>0$使得

$$\|T_n^{-1}\|\leqslant C\qquad(\forall n\in\mathbf{N}). \tag{2.3.23}$$

在相容性的前提下，P.Lax指出了近似格式的收敛性与稳定性是等价的，正是有

定理2.3.18(Lax等价定理) 如果(2.3.22)对$\forall x\in\mathscr{X}$成立，那末为了$x_n\to x(n\to\infty)$，其中x_n与x分别是(2.3.21)与(2.3.20)的解，必须且仅须$\exists C>0$，使得(2.3.23)成立．

证 充分性．由(2.3.22)和(2.3.23)，我们得

$$\begin{aligned}\|x_n-x\|&=\|T_n^{-1}y-T_n^{-1}T_nx\|\\&\leqslant\|T_n^{-1}\|\|Tx-T_nx\|\\&\leqslant C\|Tx-T_nx\|\to 0\qquad(\text{当 } n\to\infty).\end{aligned}$$

必要性．$\forall y\in\mathscr{Y}$，令$x_n=T_n^{-1}y$，$x=T^{-1}y$，便有$x_n\to x$．因此，

$$T_n^{-1}y\to T^{-1}y\qquad(\text{当 } n\to\infty,\forall y\in\mathscr{Y}).$$

由共鸣定理，立得$\|T_n^{-1}\|$有界．

习　题

2.3.1　设$\mathscr{X}$是B空间，$\mathscr{X}_0$是$\mathscr{X}$的闭子空间。映射φ：$\mathscr{X}\to\mathscr{X}_0$定义为

$$\varphi: x\mapsto[x]\qquad(\forall x\in\mathscr{X}),$$

其中$[x]$表示含x的商类(见习题1.4.17)。求证φ是开映射。

2.3.2　设$\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$是B空间，又设方程$Ux=y$对$\forall y\in\mathscr{Y}$有解$x\in\mathscr{X}$，其中$U\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，并且$\exists m>0$，使得

$$\|Ux\|\geqslant m\|x\|\qquad(\forall x\in\mathscr{X}).$$

求证：U有连续逆U^{-1}，并且$\|U^{-1}\|\leqslant 1/m$。

2.3.3　设H是 Hilbert 空间，$A\in\mathscr{L}(H)$并且$\exists m>0$，使得

$$|(Ax,x)|\geqslant m\|x\|^2\qquad(\forall x\in H).$$

求证$\exists A^{-1}\in\mathscr{L}(H)$。

2.3.4　设$\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$是B^*空间，D是$\mathscr{X}$的线性子空间并且A：$D\to\mathscr{Y}$是线性映射。求证：

(1) 如果A连续且D是闭的，则A是闭算子；

(2) 如果A连续且是闭算子，那末$\mathscr{Y}$完备蕴含D闭；

(3) 如果A是单射的闭算子，则A^{-1}也是闭算子；

(4) 如果$\mathscr{X}$完备，A是单射的闭算子，$R(A)$在$\mathscr{Y}$中稠密并且A^{-1}连续，那末$R(A)=\mathscr{Y}$。

2.3.5　用等价范数定理证明$(C[0,1],\|\cdot\|_1)$不是B空间，其中$\|f\|_1=\int_0^1|f(t)|dt\,(\forall f\in C[0,1])$。

2.3.6　(Гельфанд 引理)设$\mathscr{X}$是B空间，p：$\mathscr{X}\to\mathbb{R}^1$满足

(1) $p(x)\geqslant 0\quad(\forall x\in\mathscr{X})$;

(2) $p(\lambda x)=\lambda p(x)\quad(\forall\lambda>0,\forall x\in\mathscr{X})$;

(3) $p(x_1+x_2)\leqslant p(x_1)+p(x_2)\quad(\forall x_1,x_2\in\mathscr{X})$;

(4) 当$x_n\to x$时，$\varliminf_{n\to\infty}p(x_n)\geqslant p(x)$。

求证：$\exists M>0$，使得$p(x)\leqslant M\|x\|\quad(\forall x\in\mathscr{X})$。

2.3.7 设$\mathscr{X}$和$\mathscr{Y}$是B空间，$A_n\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})(n=1,2,\cdots)$，又对$\forall x\in\mathscr{X}$，$\{A_nx\}$在$\mathscr{Y}$中收敛。求证：$\exists A\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，使得

$$A_nx\to Ax(\forall x\in\mathscr{X}),\text{并且}\|A\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|A_n\|.$$

2.3.8 设$1<p<\infty$并且$1/p+1/q=1$。如果序列$\{a_k\}$使得对$\forall x=\{\xi_k\}\in l^p$保证$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\xi_k$收敛，求证$\{a_k\}\in l^q$。又若$f$：$x\mapsto\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\xi_k$，求证：$f$作为$l^p$上的线性泛函，有

$$\|f\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

2.3.9 如果序列$\{a_k\}$使得对$\forall x=\{\xi_k\}\in l^1$，保证$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\xi_k$收敛，求证$\{a_k\}\in l^\infty$。又若$f$：$x\mapsto\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\xi_k$，作为$l^1$上的线性泛函。求证：

$$\|f\|=\sup_{k\geq1}|a_k|.$$

2.3.10 用Гельфанд引理证明共鸣定理。

2.3.11 设$\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$是B空间，$A\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$是满射的。求证：如果在$\mathscr{Y}$中$y_n\to y_0$，则$\exists C>0$与$x_n\to x_0$，使得$Ax_n=y_n$，且$\|x_n\|\leqslant C\|y_n\|$。

2.3.12 设$\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$是B空间，T是闭线性算子，$D(T)\subset\mathscr{X}$，$R(T)\subset\mathscr{Y}$，$N(T)\triangleq\{x\in\mathscr{X}\mid Tx=\theta\}$。

(1) 求证：$N(T)$是$\mathscr{X}$的闭线性子空间；

(2) 如果$N(T)=\{\theta\}$，求证：$R(T)$在$\mathscr{Y}$中闭的充分且必要条件是$\exists a>0$，使得

$$\|x\|\leqslant a\|Tx\|\qquad(\forall x\in D(T));$$

(3) 如果用$d(x,N(T))$表示点$x\in\mathscr{X}$到集合$N(T)$的距离

$\inf\limits_{z\in N(T)}\|z-x\|$)。求证：$R(T)$在$\mathscr{Y}$中闭的充分且必要条件是$\exists a>0$，使得

$$d(x,N(T))\leqslant a\|Tx\| \quad (\forall x\in D(T)).$$

2.3.13 设$a(x,y)$是 Hilbert 空间H上的一个共轭双线性泛函，满足：

(1) $\exists M>0$，使得$|a(x,y)|\leqslant M\|x\|\|y\| \quad (\forall x,y\in H)$；

(2) $\exists \delta>0$，使得$|a(x,x)|\geqslant\delta\|x\|^2 \quad (\forall x\in H)$。

求证：$\forall f\in H^*$，$\exists|\, y_f\in H$，使得

$$a(x,y_f)=f(x) \quad (\forall x\in H),$$

而且y_f连续地依赖于f。

2.3.14 设Ω是$\mathbb{R}^2$中边界光滑的有界开区域，a：$\Omega\to\mathbf{R}^1$有界可测并满足$0<a_0\leqslant a$，$f\in L^2(\Omega)$。规定

$$a(u,v)\triangleq\int_\Omega(\nabla u\cdot\nabla v+auv)dxdy \quad (\forall u,v\in H^1(\Omega));$$

$$F(v)\triangleq\int_\Omega fvdxdy \quad (\forall v\in L^2(\Omega)).$$

求证：$\exists|\, u\in H^1(\Omega)$满足

$$a(u,v)=F(v) \quad (\forall v\in H^1(\Omega)).$$

§4 Hahn-Banach 定理

给定无穷维线性赋范空间$\mathscr{X}$，问：是否存在不恒等于0的连续线性泛函？更进一步问：是否有"足够多"的连续线性泛函？所谓足够多，是指多到足以用来分辨不同元的程度，即当$x_1\neq x_2$ $(x_1,x_2\in\mathscr{X})$时，必有$\mathscr{X}$上的一个连续线性泛函$f(\cdot)$，使得$f(x_1)\neq f(x_2)$。本节从线性泛函的延拓入手解决这个问题。有趣的是，从几何上看，这个线性泛函的延拓性质表现为凸集的分离性质。而这个分离性质又是研究与凸集有关的 Banach 空间几何学的基本出发点。

本节介绍的 **Hahn-Banach** 定理是泛函分析的最基本定理之一。无论在纯粹数学中，还是在应用数学中，它都有广泛的应用。

4.1 线性泛函的延拓定理

回顾命题1.5.10，复线性空间$\mathscr{X}$上，只要含有一个均衡吸收凸集，由它便可决定这空间上的一个半模 $p(x)$，我们试看从它能否产生$\mathscr{X}$上的一个非 0 的连续线性泛函，设 $x_0\in\mathscr{X}$，使$p(x_0)\neq 0$。如果我们规定：

$$\mathscr{X}_0\triangleq\{\lambda x_0|\lambda\in\mathbf{K}\},\quad f_0(\lambda x_0)\triangleq\lambda p(x_0)\quad(\forall\lambda\in\mathbf{K}).$$

那末 f_0 就是$\mathscr{X}_0$上的一个非 0 线性泛函，满足有界性条件：

$$|f_0(\lambda x_0)|\leqslant|\lambda p(x_0)|=p(\lambda x_0)\qquad(\forall\lambda\in\mathbf{K}).$$

如果能把这个定义在$\mathscr{X}_0$上的连续线性泛函延拓成整个空间$\mathscr{X}$上的连续线性泛函，问题就解决了。下面要证明的 **Hahn-Banach**定理正是保证这种延拓的可能性，不过为了多方面的应用，提法上稍为一般些。

定理2.4.1(实 Hahn-Banach 定理) 设$\mathscr{X}$是实线性空间，p 是定义在$\mathscr{X}$上的次线性泛函，$\mathscr{X}_0$是$\mathscr{X}$的实线性子空间，f_0是$\mathscr{X}_0$上的实线性泛函并满足 $f_0(x)\leqslant p(x)(\forall x\in\mathscr{X}_0)$。那末$\mathscr{X}$上必有一个实线性泛函 f，满足：

(1) $f(x)\leqslant p(x)(\forall x\in\mathscr{X})$(受 p 控制条件)；

(2) $f(x)=f_0(x)(\forall x\in\mathscr{X}_0)$(延拓条件)。

证 $\forall y_0\in\mathscr{X}\backslash\mathscr{X}_0$，记$\mathscr{X}_1\triangleq\{x+ay_0|x\in\mathscr{X}_0,a\in\mathbf{R}^1\}$。首先，将 f_0 延拓到$\mathscr{X}_1$，设延拓后的线性泛函记为f_1，那末

$$f_1(x+ay_0)=f_0(x)+af_1(y_0)\quad(\forall x\in\mathscr{X}_0,\forall a\in\mathbf{R}^1).\tag{2.4.1}$$

可见问题只在于决定 $f_1(y_0)$的值。既然要求 f_1 满足受 p 控制条件，所以

$$f_1(x+ay_0)\leqslant p(x+ay_0)\quad(\forall x\in\mathscr{X}_0,\forall a\in\mathbf{R}^1).\tag{2.4.2}$$

不等号两边同除以$|a|$推出它等价于

$$\begin{cases} f_1(y_0-z)\leqslant p(y_0-z) & (\forall z\in\mathscr{X}_0), \\ f_1(-y_0+y)\leqslant p(-y_0+y) & (\forall y\in\mathscr{X}_0), \end{cases}$$

或 $$f_0(y)-p(-y_0+y)\leqslant f_1(y_0)\leqslant f_0(z)+p(y_0-z)$$
$$(\forall y,z\in\mathscr{X}_0)。$$

于是为了能取到适合(2.4.2)的 $f_1(y_0)$ 必须且仅须：

$$\sup_{y\in\mathscr{X}_0}\{f_0(y)-p(-y_0+y)\}\leqslant\inf_{z\in\mathscr{X}_0}\{f_0(z)+p(y_0-z)\}。\tag{2.4.3}$$

然而(2.4.3)是可以保证成立的。这是因为，对 $\forall y,z\in\mathscr{X}_0$，

$$\begin{aligned} f_0(y)-f_0(z)&=f_0(y-z) \\ &\leqslant p(y-z)\leqslant p(y-y_0)+p(y_0-z)。 \end{aligned}$$

所以 $$f_0(y)-p(-y_0+y)\leqslant f_0(z)+p(y_0-z)\quad(\forall y,z\in\mathscr{X}_0)。\tag{2.4.4}$$

显然(2.4.4)蕴含(2.4.3)，今任意取定 $f_1(y_0)$ 为(2.4.3)两端的中间值，就能根据(2.4.1)得出 f_0 在 $\mathscr{X}_1$ 上的延拓 f_1。由于(2.4.3)两端未必相等，其中间值 $f_1(y_0)$ 的取法一般不唯一，因此这种延拓也不一定唯一。

剩下的问题是怎样把 f_0 逐步延拓到整个 $\mathscr{X}$ 上去，这需要用 Zorn 引理1.6.20。令

$$\mathscr{F}\triangleq\left\{(\mathscr{X}_\Delta,f_\Delta)\left|\begin{array}{l}\mathscr{X}_0\subset\mathscr{X}_\Delta\subset\mathscr{X}; \\ \forall x\in\mathscr{X}_0\Rightarrow f_\Delta(x)=f_0(x); \\ \forall x\in\mathscr{X}_\Delta\Rightarrow f_\Delta(x)\leqslant p(x)\end{array}\right.\right\}.$$

在 $\mathscr{F}$ 中引入序关系如下：$(\mathscr{X}_{\Delta_1},f_{\Delta_1})<(\mathscr{X}_{\Delta_2},f_{\Delta_2})$ 是指

$$\mathscr{X}_{\Delta_1}\subset\mathscr{X}_{\Delta_2},\text{且 } f_{\Delta_1}(x)=f_{\Delta_2}(x)\quad(\forall x\in\mathscr{X}_{\Delta_1}).$$

于是 $\mathscr{F}$ 成为半序集，又设 M 是 $\mathscr{F}$ 中的任一个全序子集，令

$$\mathscr{X}_M\triangleq\bigcup_{(\mathscr{X}_\Delta,f_\Delta)\in M}\{\mathscr{X}_\Delta\},$$

及 $$f_M(x)=f_\Delta(x)\quad(\forall x\in\mathscr{X}_\Delta,\ (\mathscr{X}_\Delta,f_\Delta)\in M).$$

由于M是全序子集，容易验证$\mathscr{X}_M$是$\mathscr{X}$的包含$\mathscr{X}_0$的子空间，且f_M在$\mathscr{X}_M$上是唯一确定的，满足$f_M(x)\leqslant p(x)$。于是$(\mathscr{X}_M, f_M)\in\mathscr{T}$并且是$M$的极大元。依Zorn引理。$\mathscr{T}$本身存在极大元，不妨记之为$(\mathscr{X}_A, f_A)$。

最后，我们来证明$\mathscr{X}_A=\mathscr{X}$。用反证法，倘若不然，那么，根据第一段的证明，可以构造出

$$(\widetilde{\mathscr{X}}_A, \tilde{f}_A)\in\mathscr{T}, \text{使得} \mathscr{X}_A\subset\widetilde{\mathscr{X}}_A, \quad \text{但是} \mathscr{X}_A\neq\widetilde{\mathscr{X}}_A.$$

从而$(\widetilde{\mathscr{X}}_A, \tilde{f}_A)>(\mathscr{X}_A, f_A)$，但是$(\widetilde{\mathscr{X}}_A, \tilde{f}_A)\neq(\mathscr{X}_A, f_A)$。这与$(\mathscr{X}_A, f_A)$的极大性矛盾。因此，$\mathscr{X}_A=\mathscr{X}$。于是所求的$f$取为$f_A$即可。▎

对于复的线性空间，由于复数不能比较大小，相应的延拓定理必须作某些修改。

定理2.4.2（复Hahn-Banach定理） 设$\mathscr{X}$是复线性空间，p是$\mathscr{X}$上的半模。$\mathscr{X}_0$是$\mathscr{X}$的线性子空间，f_0是$\mathscr{X}_0$上的线性泛函，并满足$|f_0(x)|\leqslant p(x)$，$\forall x\in\mathscr{X}_0$，那末$\mathscr{X}$上必有一个线性泛函$f$满足：

(1) $|f(x)|\leqslant p(x)\quad(\forall x\in\mathscr{X})$；

(2) $f(x)=f_0(x)\quad(\forall x\in\mathscr{X}_0)$。

证 把$\mathscr{X}$看成实线性空间，相应把$\mathscr{X}_0$也看成是实线性子空间，令

$$g_0(x)\triangleq \mathrm{Re} f_0(x)\qquad(\forall x\in\mathscr{X}_0),$$

便有$g_0(x)\leqslant p(x)\ (\forall x\in\mathscr{X}_0)$。从而根据定理2.4.1，必有$\mathscr{X}$上的实线性泛函$g$，使得

$$g(x)=g_0(x)\qquad(\forall x\in\mathscr{X}_0),\tag{2.4.5}$$

且

$$g(x)\leqslant p(x)\qquad(\forall x\in\mathscr{X}).\tag{2.4.6}$$

现在，令

$$f(x)\triangleq g(x)-\mathrm{i}g(\mathrm{i}x)\qquad(\forall x\in\mathscr{X}).\tag{2.4.7}$$

那末依(2.4.5)，我们有

$$f(x)=g_0(x)-\mathrm{i}g_0(\mathrm{i}x)$$

$$=\mathrm{Re}f_0(x)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}f_0(x)=f_0(x)\qquad(\forall x\in\mathscr{X}_0),$$

又 $$f(\mathrm{i}x)=g(\mathrm{i}x)-\mathrm{i}g(-x)$$

$$=\mathrm{i}[g(x)-\mathrm{i}g(\mathrm{i}x)]=\mathrm{i}f(x)\qquad(\forall x\in\mathscr{X}).$$

从而 f 也是复齐性的，剩下还要说明在 $\mathscr{X}$ 上，$|f(x)|$ 受 $p(x)$ 控制。若 $f(x)=0$，这是显然的。若 $f(x)\neq 0$，令

$$\theta\triangleq\arg f(x),$$

那末依(2.4.6)，我们有

$$|f(x)|=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}f(x)=f(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x)$$

$$=g(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x)\leqslant p(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x)=p(x)\qquad(\forall x\in\mathscr{X}).$$

其中第三个等号是因为正数 $f(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x)=|f(x)|$ 的虚部为0。

综上所得，结合命题1.5.10便可推出

定理2.4.3 为了复线性空间 $\mathscr{X}$ 上至少有一个非零线性泛函，只要 $\mathscr{X}$ 中含有某一个均衡吸收凸集。∎

在 B^* 空间上，Hahn-Banach延拓定理具有下列更特殊的形式和应用。

定理2.4.4(Hahn-Banach) 设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间，$\mathscr{X}_0$ 是 $\mathscr{X}$ 的线性子空间，f_0 是定义在 $\mathscr{X}_0$ 上的有界线性泛函，则在 $\mathscr{X}$ 上必有有界线性泛函 f 满足：

(1) $f(x)=f_0(x)\quad(\forall x\in\mathscr{X}_0)$ （延拓条件）；

(2) $\|f\|=\|f_0\|_0$ （保范条件），

其中 $\|f_0\|_0$ 表示 f_0 在 $\mathscr{X}_0$ 上的范数。

注 由于 f 满足(1)，(2)两个条件，通常称 f 为 f_0 的保范延拓。

证 在 $\mathscr{X}$ 上定义 $p(x)\triangleq\|f_0\|_0\|x\|$，那末 $p(x)$ 是 $\mathscr{X}$ 上的半模，从而根据定理2.4.3，必存在 $\mathscr{X}$ 上的线性泛函 $f(x)$，满足

$$f(x)=f_0(x)\qquad(\forall x\in\mathscr{X}_0),\tag{2.4.8}$$

及 $$|f(x)|\leqslant p(x)=\|f_0\|_0\|x\|\qquad(\forall x\in\mathscr{X}).\tag{2.4.9}$$

按泛函范数的定义，(2.4.9)蕴含 $\|f\|\leqslant\|f_0\|_0$，又由(2.4.8)，显然有 $\|f_0\|_0\leqslant\|f\|$。因此 $\|f\|=\|f_0\|_0$。

推论2.4.5 每个B^*空间必有足够多的连续线性泛函。

证 任给 $x_1,x_2\in\mathscr{X}$，若 $x_1\neq x_2$，则 $x_0\triangleq x_1-x_2\neq\theta$。令$\mathscr{X}_0\triangleq\{\lambda x_0|\lambda\in\mathbb{C}\}$，并在$\mathscr{X}_0$上定义

$$f_0(\lambda x_0)=\lambda\|x_0\| \qquad (\forall\lambda\in\mathbb{C}).$$

那末$f_0(x_0)=\|x_0\|$且$\|f_0\|_0=1$。依定理2.4.4，存在$\mathscr{X}$上的连续线性泛函f，使得

$$f(x_0)=f_0(x_0)=\|x_0\|; \qquad \|f\|=\|f_0\|_0=1.$$

$\mathscr{X}$上的这个非0连续线性泛函f，可以分辨x_1,x_2。事实上，

$$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2)=f(x_0)\neq 0. \quad \blacksquare$$

这里我们实际上证明了如下

推论2.4.6 设$\mathscr{X}$是B^*空间，$\forall x_0\in\mathscr{X}\backslash\{\theta\}$，必$\exists f\in\mathscr{X}^*$使得

$$f(x_0)=\|x_0\|, \qquad 且\|f\|=1.$$

注 本推论给出判别B^*空间零元的一种方法：为了$x_0=0$，必须且仅须$\forall f\in\mathscr{X}^*$蕴含$f(x_0)=0$。 $\blacksquare$

回顾在Hilbert空间H中，对任意的线性连续泛函f，$\exists y\in H$，使得

$$f(x)=(x,y) \qquad (\forall x\in H).$$

若记$M\triangleq\{x|f(x)=0\}$，那末对$\forall x_0\in H$有

$$f(x_0)=(x_0,y)=(x_0-P_Mx_0,y).$$

其中P_Mx_0表示x_0在M上的投影，从而

$$|f(x_0)|\leqslant\|x_0-P_Mx_0\|\|y\|=\|f\|\rho(x_0,M). \qquad (2.4.10)$$

在一般的B^*空间$\mathscr{X}$中，$\rho(x_0,M)\triangleq\inf\limits_{y\in M}\|x_0-y\|$，(2.4.10) 仍然成立。事实上，$\forall n\in\mathbf{N}$，及$\forall x_0\in\mathscr{X}$，按下确界定义$\exists x_n\in M$，使得

$$\rho(x_0,M)\leqslant\rho(x_0,x_n)<\rho(x_0,M)+\frac{1}{n}.$$

因此，
$$|f(x_0)|=|f(x_n-x_0)|\leqslant\|f\|\|x_n-x_0\|$$

$$\leqslant\|f\|\left(\rho(x_0, M)+\frac{1}{n}\right),$$

令$n\to\infty$，即得(2.4.10)。

现在提一个问题，在B^*空间$\mathscr{X}$上，给定子空间M及$x_0\in\mathscr{X}\backslash M$，是否$\exists f\in\mathscr{X}^*$，使得$f$在$M$上为0，并使(2.4.10)中的等号成立？这导致如下

定理2.4.7 设$\mathscr{X}$是B^*空间，M是$\mathscr{X}$的线性子空间。若$x_0\in\mathscr{X}$，且

$$d\triangleq\rho(x_0, M)>0;$$

则必$\exists f\in\mathscr{X}^*$适合条件：

(1) $f(x)=0\quad(\forall x\in M)$;

(2) $f(x_0)=d$;

(3) $\|f\|=1$。

证 考虑$\mathscr{X}_0\triangleq\{x=x'+\alpha x_0 \mid x'\in M, \ \alpha\in\mathbf{K}\}$，$\forall x\in\mathscr{X}_0$，定义

$$f_0(x)=\alpha d.$$

显然，f_0适合(1),(2)。又若$x=x'+\alpha x_0(x'\in M, \ \alpha\neq 0)$，则

$$\begin{aligned}|f_0(x)|&=|\alpha|d=|\alpha|\rho(x_0, M)\\&\leqslant|\alpha|\left\|\frac{x'}{\alpha}+x_0\right\|\\&=\|x'+\alpha x_0\|=\|x\|.\end{aligned}$$

因此$\|f_0\|\leqslant 1$。依Hahn-Banach定理2.4.4，将f_0保范延拓为$f\in\mathscr{X}$，便有f满足(1),(2)及$\|f\|\leqslant 1$。又因为$f\in\mathscr{X}^*$，并满足条件(2)，所以由(2.4.10)便得$\|f\|\geqslant 1$，于是(3)成立。

推论2.4.8 设M是B^*空间$\mathscr{X}$的一个子集，又设x_0是$\mathscr{X}$中的任一个非零元素。那末

$$x_0\in\overline{\operatorname{span} M},$$

其充分且必要条件是：对$\forall f\in\mathscr{X}^*$，

$$f(x)=0\quad(\forall x\in M)\Rightarrow f(x_0)=0.$$

证 必要性是显然的。下面用反证法证充分性。倘若 $x_0 \overline{\in} \overline{\mathrm{span} M}$，那末

$$d \triangleq \rho(x_0, \overline{\mathrm{span} M}) > 0.$$

因此，依定理2.4.7，$\exists f \in \mathscr{X}^*$，使得 $f(x)=0(\forall x \in M)$，并且 $f(x_0)=d>0$。但按充分性假定，对此 f 应有 $f(x_0)=0$，便引出矛盾。

特例 若 $M=\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$，问：是否能用形如 $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ 的线性组合的序列极限去逼近给定的元素 x_0？本推论给出了这种逼近存在的一个充分且必要条件：对所有的在 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 上为 0 的线性连续泛函 f 都有 $f(x_0)=0$。

4.2 几何形式——凸集分离定理

平面上两个互不相交的凸集 A 与 B，$A \cap B = \varnothing$，有一条重要的几何性质：存在一条直线 l 分离 A 与 B，即存在直线 l 使 A 与 B 各在 l 的一侧（请参看图 2.4.1)。

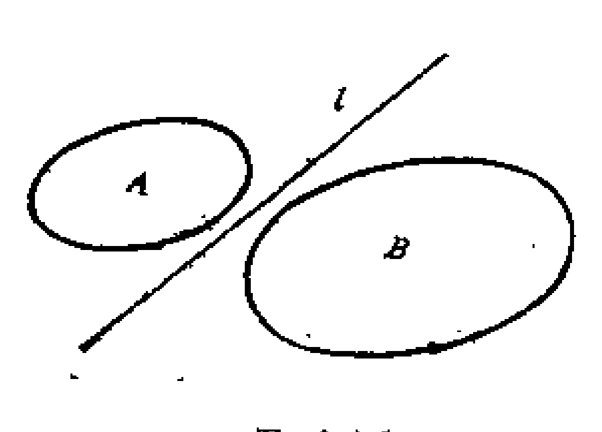


图 2.4.1

在一般的线性空间 $\mathscr{X}$ 中，这条几何性质有没有相应的推广呢？下面就来讨论这个问题，为简单起见，今后我们总假定 $\mathscr{X}$ 是实的，$\mathscr{X}$ 上的线性泛函也取实值。

在 $\mathscr{X}$ 上相应于平面上过原点的直线的概念是极大线性子空间的概念。

定义2.4.9 在线性空间 $\mathscr{X}$ 中，$\mathscr{X}$ 的线性子空间 M 称为是极大的，如果对于任何一个以 M 为真子集的线性子空间 M_1 必有 $M_1 = \mathscr{X}$。

命题2.4.10 M 是极大线性子空间的充分且必要条件是，M

是线性子空间，并且 $\forall x_0\in\mathscr{X}\backslash M$ 有

$$\mathscr{X}=\{\lambda x_0\mid\lambda\in\mathbf{R}^1\}\oplus M.$$

证 必要性是显然的。为了证充分性，设 M_1 是以 M 为真子集的线性子空间，那末 $\exists x_0\in M_1\backslash M$。于是有 $\lambda x_0\in M_1$（$\forall\lambda\in\mathbf{R}^1$），及 $M\subset M_1$，从而

$$\mathscr{X}=\{\lambda x_0\mid\lambda\in\mathbf{R}^1\}\oplus M\subset M_1,$$

即得 $\mathscr{X}=M_1$。于是 M 是极大线性子空间。

定义2.4.11 $\mathscr{X}$ 的极大线性子空间 M，对向量 $x_0\in\mathscr{X}\backslash M$ 的平移：

$$L\triangleq x_0+M$$

称为极大线性流形，或简称超平面。

注 超平面是平面上一般直线概念的推广。平面上的直线 l 可以通过线性函数表示：

$$l=\{x=(\xi,\eta)\mid a\xi+b\eta=C\}$$

超平面 L 也可以通过线性泛函来刻划。事实上，如果 f 是 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 上的非零（连续）线性泛函，那末集合

$$H_f^r\triangleq\{x\in\mathscr{X}\mid f(x)=r\}\qquad(r\in\mathbf{R}^1)$$

必是一个（闭）超平面，这是因为 H_f^0 显然是线性子空间，又 $\forall x_1\in\mathscr{X}\backslash H_f^0$，$\forall x\in\mathscr{X}$ 有

$$x=\frac{f(x)}{f(x_1)}x_1+H_f^0.$$

从而 H_f^0 还是极大的。由于 f 是非 0 的，$\exists x_0\in\mathscr{X}$，使 $f(x_0)\neq0$。由 f 的线性，不妨设 $f(x_0)=r$，今对任意 $x\in H_f^r$，因为

$$f(x-x_0)=f(x)-f(x_0)=0,$$

所以 $x-x_0\in H_f^0$，这证明了 $H_f^r=x_0+H_f^0$ 是一个超平面。又若 f 是连续的，则 H_f^r 显然是闭的。

反过来，若 L 是（闭）超平面，可设 $L=x_0+M$，其中 M 是（闭）极大线性子空间，$x_0\in\mathscr{X}\backslash M$。这时 $\forall x\in\mathscr{X}$ 可表成

$$x=\lambda x_0+y\qquad(\lambda\in\mathbf{R}^1,\ y\in M)$$

的形式。再定义线性泛函$f: \mathscr{X} \to \mathbb{R}^1$

$$f(x)=f(\lambda x_0+y)=\lambda \qquad (\lambda\in \mathbb{R}^1,\ y\in M).$$

显然 f 为 $\mathscr{X}$ 上的线性泛函满足：$M=H_f^0$ 以及 $f(x_0)=1$。因此 $L=H_f^1$。若 L 闭，从而 H_f^0 闭，那末 f 还是连续的(见习题2.1.7(3))。

总结起来有

定理2.4.12 为了 L 是 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 上的一个(闭)超平面，必须且仅须存在非零(连续)线性泛函 f 及 $r\in\mathbb{R}^1$，使得$L=H_f^r$。 ∎

所谓超平面$L=H_f^r$使一个集合 E 在它的一侧，用线性泛函来描写就是：

$$\forall\, x\in E \Rightarrow f(x)\leqslant r\,(\text{或}\geqslant r).$$

定义2.4.13 所谓超平面$L=H_f^r$分离集合 E 与 F，是指：

$$\forall\, x\in E \Rightarrow f(x)\leqslant r\,(\text{或}\geqslant r),$$

$$\forall\, x\in F \Rightarrow f(x)\geqslant r\,(\text{或}\leqslant r).$$

如果在上面两个式子中，分别用“$<$”与“$>$”代替“$\leqslant$”与“$\geqslant$”，那末就说H_f^r严格分离 E 与 F。

现在来讨论如何用超平面分离两个互不相交的凸集，以此作为Hahn-Banach定理的应用。设$\mathscr{X}$是 B^* 空间，依定理1.5.11，如果 E 是$\mathscr{X}$的以 θ为内点的真凸子集，那么它的 Minkowski 泛函 $p(x)$便是一个非零的连续次线性泛函，满足

$$\forall\, x\in E \Rightarrow p(x)\leqslant 1. \qquad (2.4.11)$$

如果还存在一点$x_0\in\mathscr{X}\backslash E$，则由$p(x)$的定义和$E$是以 θ 为内点的凸集可以推出 $p(x_0)\geqslant 1$。下面我们证明存在超平面 H_f^r 分离 E 与 x_0，为此寻求线性泛函 f。先在一维线性空间

$$\mathscr{X}_0 \triangleq \{\lambda x_0 \mid \lambda\in\mathbb{R}^1\}$$

上定义 $$f_0(\lambda x_0)\triangleq \lambda p(x_0) \qquad (\forall\,\lambda\in\mathbb{R}^1).$$

显然 f_0 是 $\mathscr{X}_0$ 上的线性泛函，满足

$$f_0(x)=f_0(\lambda x_0)=\lambda p(x_0)$$
$$\leqslant p(\lambda x_0)=p(x) \qquad (\forall\, x\in\mathscr{X}_0)$$

根据实形式 Hahn-Banach 定理 2.2.2，必存在 $\mathscr{X}$ 上的线性泛函 $f(x)$，满足

$$f(x_0)=f_0(x_0)=p(x_0)\geqslant 1, \tag{2.4.12}$$

$$f(x)\leqslant p(x) \qquad (\forall x\in\mathscr{X}). \tag{2.4.13}$$

联合(2.4.11)与(2.4.13)得到 $f(x)\leqslant 1(\forall x\in E)$。于是 H_f^1 便是分离 E 与 x_0 的超平面。这样我们就得到

定理2.4.14(Hahn-Banach定理的几何形式) 设 E 是 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 上以 θ 为内点的真凸子集，又设 $x_0\overline{\in} E$，则必存在一个超平面 H_f^r 分离 x_0 与 E。

注 1 因为只要通过适当平移，总可以把任一点变为 θ 点，所以本定理对含有任意内点的真凸子集仍成立，但对于无穷维空间 $\mathscr{X}$，E 有内点这一条是不能省略的。

注 2 可以证明定理中存在的超平面 $L\triangleq H_f^r$ 还是闭的。这只要证明相应的 f 还是连续的。事实上，由(2.4.13)推出

$$|f(x)|\leqslant \max(p(x),p(-x)) \qquad (\forall x\in\mathscr{X}).$$

因此，$p(x)$ 的连续性蕴含 f 在 θ 点连续。又因为 f 是线性的，所以 f 在整个 $\mathscr{X}$ 上连续。▎

下面我们转向考虑两个凸集的分离问题。为此，想办法把它转化为一个凸集与其外一点的分离问题。在 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 中，若 E_1,E_2 是两个互不相交的凸集，E_1 是有内点的，那末容易推知集合

$$E\triangleq E_1+(-1)E_2$$

是一个非空凸集，并且是有内点的。此外，$\theta\overline{\in} E$。事实上，倘若不然，则 $\exists x_1\in E_1$，$x_2\in E_2$，使得 $x_1-x_2=\theta$。从而

$$x_1=x_2\in E_1\cap E_2.$$

这与 $E_1\cap E_2=\varnothing$ 矛盾。

根据几何形式的 Hahn-Banach 定理2.4.14，存在闭超平面 H_f^r 分离 E 和 θ。不妨假定

$$f(x)\leqslant r \quad (\forall x\in E); \qquad f(\theta)\geqslant r.$$

从而$f(x)\leqslant 0(\forall x\in E)$，即有 $f(y-z)\leqslant 0(\forall y\in E_1,\forall z\in E_2)$. 再由 f 的线性便得

$$f(y)\leqslant f(z)\qquad(\forall y\in E_1,\ \forall z\in E_2).$$

因此，$\exists s\in\mathbb{R}^1$，使得

$$\sup_{y\in E_1}f(y)\leqslant s\leqslant\inf_{z\in E_2}f(z).$$

于是H_f^s分离E_1和E_2，并由H_f^s闭可知H_f^s也是闭的。总结起来有

定理2.4.15 设 E_1 和 E_2 是 B^* 空间中两个互不相交的非空凸集，E_1有内点；那末$\exists s\in\mathbb{R}^1$及非零线性连续泛函 f，使得超平面 H_f^s 分离 E_1 和 E_2，换句话说，存在一个非零线性连续泛函 f，使得

$$f(x)\leqslant s\quad(\forall x\in E_1);\qquad f(x)\geqslant s\quad(\forall x\in E_2).$$

注 条件 $E_1\cap E_2=\varnothing$ 可以减弱到 $\mathring{E}_1\cap E_2=\varnothing$. 这是因为 E_1 有内点，所以$\mathring{E}_1$有内点，从而$\mathring{E}_1$是有内点的凸集。对$\mathring{E}_1$与E_2应用本定理结论得到分离它们的闭超平面H_f^s，不妨设就是

$$f(x)\leqslant s\qquad(\forall x\in\mathring{E}_1);\qquad(2.4.14)$$

$$f(x)\geqslant s\qquad(\forall x\in E_2).\qquad(2.4.15)$$

由 f 的连续性，(2.4.14)可以加强为

$$f(x)\leqslant s\qquad(\forall x\in\overline{\mathring{E}_1}).$$

又$\overline{\mathring{E}_1}=\bar{E}_1$(见习题1.5.1(2))，即得

$$f(x)\leqslant s\qquad(\forall x\in E_1).\qquad(2.4.16)$$

联合(2.4.15)与(2.4.16)，就是H_f^s分离E_1和E_2.

推论2.4.16(Ascoli定理) 设E是B^*空间$\mathscr{X}$中的闭凸集，则$\forall x_0\in\mathscr{X}\backslash E$，$\exists f\in\mathscr{X}^*$及$\alpha\in\mathbb{R}^1$，适合

$$f(x)<\alpha<f(x_0)\qquad(\forall x\in E).\qquad(2.4.17)$$

证 因为$x_0\in\mathscr{X}\backslash E$及$E$是闭集，所以$\exists\delta>0$，使得

$$B(x_0,\delta)\subset\mathscr{X}\backslash E,$$

而 $B(x_0,\delta)$是有内点的凸集。对E和 $B(x_0,\delta)$应用定理2.4.15，存在非零线性连续泛函f，适合

$$\sup_{x \in E} f(x) \leqslant \inf_{y \in B(x_0, \delta)} f(y). \qquad (2.4.18)$$

进一步可以证明

$$\inf_{y \in B(x_0, \delta)} f(y) < f(x_0). \qquad (2.4.19)$$

事实上，倘若(2.4.19)不成立，那末

$$f(y) \geqslant f(x_0) \qquad (\forall y \in B(x_0, \delta)). \qquad (2.4.20)$$

这表明$f(x_0)$是$f(y)$在$B(x_0,\delta)$中的极小值，这与 f 的非零线性矛盾(参看习题2.1.9)。于是(2.4.19) 成立。任取 (2.4.19)两端的中间值$\alpha \in \mathbf{R}^1$，并由(2.4.18)即得(2.4.17)。

推论2.4.17(Mazur定理) 设E是B^*空间$\mathscr{X}$上的一个有内点的凸集，F是$\mathscr{X}$上的一个线性流形，又设$\mathring{E} \cap F = \varnothing$，那末存在一个包含$F$的闭超平面$L$，使$E$在$L$的一侧。

证 设$F = x_0 + \mathscr{X}_0$，其中 $x_0 \in \mathscr{X}$，$\mathscr{X}_0$是$\mathscr{X}$的线性子空间。由定理2.4.15，存在H_f^r分离E与F，即

$$f(E) \leqslant r, \qquad f(x_0 + \mathscr{X}_0) \geqslant r. \qquad (2.4.21)$$

记 $r_0 \triangleq r - f(x_0)$，便有 $f(x) \geqslant r_0 (\forall x \in \mathscr{X}_0)$。又由 f 是线性的，及 $\mathscr{X}_0$ 是线性子空间容易推出

$$f(x) \equiv 0 \qquad (\forall x \in \mathscr{X}_0).$$

即有 $\mathscr{X}_0 \subset H_f^0$，从而 $F \subset x_0 + H_f^0 = H_f^s$，其中 $s \triangleq f(x_0)$。再由(2.4.21)推出$f(E) \leqslant s$，于是$L \triangleq H_f^s$ 便为所求。

注 上述结论换句话说就是：存在$\mathscr{X}$上的非零线性连续泛函 f 及$s \in \mathbf{R}^1$，使得

$$f(x) \leqslant s (\forall x \in E); \qquad f(x) = s (\forall x \in F). \quad \blacksquare$$

下面我们来推广平面上直线和圆的相切概念。

定义2.4.18 超平面$L = H_f^r$称为是凸集E在点x_0的承托超平面，是指E在L的一侧，且与L有公共点x_0。换句话说

$$f(x) \leqslant r = f(x_0) \quad (\forall x \in E)；或 f(x) \geqslant r = f(x_0) \quad (\forall x \in E).$$

例2.4.19 设$\mathscr{X}$是B^*空间，$E = \{x \in \mathscr{X} \mid \|x\| \leqslant r\}$，$\|x_0\| = r$，

那么E在x_0有一个承托超平面。

证 根据推论2.4.6，$\exists f\in\mathscr{X}^*$，使得$f(x_0)=\|x_0\|$，$\|f\|=1$。于是$H_f^r$便是$E$在$x_0$的承托超平面，这是因为

$$f(x)\leqslant\|f\|\|x\|\leqslant r=f(x_0)\quad(\forall x\in E).\ \blacksquare$$

更一般地，我们有

定理 2.4.20 设E是B^*空间中含有内点的闭凸集，那末通过E的每个边界点都可以作出E的一个承托超平面。

证 $\forall x_0\in E\setminus\mathring{E}$，令$F\triangleq\{x_0\}$。依推论2.4.17的法，$\exists f\in\mathscr{X}^*$及$s\in\mathbb{R}^1$，使得

$$f(x)\leqslant s=f(x_0)\quad(\forall x\in E).$$

于是H_f^s便是E在x_0的承托超平面。

4.3 *应用*

1. 抽象可微函数的中值定理。设$\mathscr{Y}$是B^*空间，$f:(a,b)\to\mathscr{Y}$叫做数值变数t的抽象函数。如果$t\in(a,b)$，在$\mathscr{Y}$中存在极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t},$$

那末就定义此极限为f在t点的微商。记为$f'(t)$。又若f在(a,b)内点点有微商，便称f在(a,b)内可微。如下中值定理是抽象可微函数的重要性质之一。

定理2.4.21 设抽象函数$f:(a,b)\to\mathscr{Y}$在(a,b)内可微，那末对$\forall t_1,t_2\in(a,b)$，$\exists\theta\in(0,1)$，使得

$$\|f(t_2)-f(t_1)\|\leqslant\|f'(\theta t_2+(1-\theta)t_1)\||t_2-t_1|.\qquad(2.4.22)$$

证 由 Hahn-Banach 定理的推论2.4.6，$\exists y^*\in\mathscr{Y}^*$，使得$\|y^*\|=1$，且

$$\langle y^*,f(t_2)-f(t_1)\rangle=\|f(t_2)-f(t_1)\|.\qquad(2.4.23)$$

令$\varphi(\eta)=\langle y^*,\ f(t_1+\eta(t_2-t_1))\rangle$，那末$\varphi(\eta)$是在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可微的实函数，且

$$\varphi'(\eta)=\langle y^*,\ f'(t_1+\eta(t_2-t_1))(t_2-t_1)\rangle.$$

对$\varphi(\eta)$应用微分中值公式，即得

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\theta)$$
$$=\langle y^*,\ f'(t_1+\theta(t_2-t_1))(t_2-t_1)\rangle, \tag{2.4.24}$$

其中$0<\theta<1$。联合(2.4.23)与(2.4.24)便得

$$\|f(t_2)-f(t_1)\|=\varphi(1)-\varphi(0)$$
$$\leqslant\|y^*\|\|f'(t_1+\theta(t_2-t_1))\||t_2-t_1|,$$

即得(2.4.22)．

2． 凸规划问题的Lagrange乘子。数学规划的理论建立在凸集分离定理的基础之上。现在我们通过下述 Kuhn-Tuker 定理，介绍凸集分离定理是怎样使用的。

定义2.4.22 设$\mathscr{X}$是一个线性空间，$C\subset\mathscr{X}$是一个凸集。称$f:C\to\mathbb{R}^1$是一个凸泛函，是指f满足：

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$
$$(\forall x,y\in C,\forall\lambda\in(0,1)).$$

注 这个定义可以等价地表达为：上方图

$$\mathrm{epi}(f)\triangleq\{(x,t)\in C\times\mathbb{R}^1|f(x)\leqslant t\}$$

是$C\times\mathbb{R}^1$中的凸集。

凸规划问题(P)是指：给定凸集C上的凸函数f，$g_1,g_2,\cdots,g_n$，求$x_0\in C$，满足：

$$g_i(x_0)\leqslant 0\qquad(i=1,2,\cdots,n);$$

且 $f(x_0)=\min\{f(x)|x\in C,g_i(x)\leqslant 0(i=1,2,\cdots,n)\}$. (2.4.25)

其中条件$g_i(x)\leqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$称为约束。在多元微分学中，我们知道往往可以借助于Lagrange乘子法，把带约束的极值问题化归为无约束的极值问题。现在我们也希望这样做。寻求条件来确定$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$，使得：若$x_0$是问题$(P)$的解，则

$$f(x_0)+\sum_{i=1}^n\lambda_ig_i(x_0)=\min\left\{f(x)+\sum_{i=1}^n\lambda_ig_i(x)|x\in C\right\} \tag{2.4.26}$$

这就通过 Lagrange 乘子$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$把约束条件吸收到极值函

数中去。考察等式(2.4.26)，它等价于不等式组

$$f(x_0)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i(x_0)\leqslant f(x)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i(x)\qquad(\forall x\in C)。\tag{2.4.27}$$

为了寻求$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，我们宁可多引进一个参数$\lambda_0$，而考察较弱的一组不等式：

$$\lambda_0 f(x_0)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i(x_0)\leqslant\lambda_0 f(x)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i(x)\qquad(\forall x\in C)。\tag{2.4.28}$$

如果能证明$\lambda_0>0$，它就等价于(2.4.27)。

寻求非零的$(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$，在几何上相当于在$\mathbb{R}^{n+1}$上找一个超平面，而不等式组(2.4.28)则就是这个超平面分离集合

$$E\triangleq\left\{(t_0,t_1,\cdots,t_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\ \middle|\ \begin{array}{l}t_0\leqslant f(x_0);\\ t_i\leqslant 0\ \ (i=1,2,\cdots,n)\end{array}\right\}$$

与

$$F\triangleq\left\{(t_0,t_1,\cdots,t_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\ \middle|\ \begin{array}{l}\exists x\in C,\ 使得\\ t_0\geqslant f(x),\ 并且\\ t_i\geqslant g_i(x)\ \ (i=1,2,\cdots,n)\end{array}\right\}$$

的结果。因为$f,g_1,\cdots,g_n$都是凸函数，易证F是$\mathbb{R}^{n+1}$中的一个凸集，而E显然是一个有内点的凸集，其内点全体是

$$\mathring{E}=\left\{(t_0,t_1,\cdots,t_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\ \middle|\ \begin{array}{l}t_0<f(x_0);\\ t_i<0\ \ (i=1,2,\cdots,n)\end{array}\right\}。$$

由于x_0是问题(P)的解，所以$\mathring{E}\cap F=\varnothing$。现在应用定理2.4.15的注，便得到

$$\lambda_0 f(x_0)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i(x_0)\leqslant\lambda_0(f(x)+\xi_0)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(g_i(x)+\xi_i)$$

$$(\forall x\in C,\ \forall\xi_i\geqslant 0(i=0,1,\cdots,n))。\tag{2.4.29}$$

由此可见$\hat{\lambda}_i \geqslant 0 (i=0,1,\cdots,n)$，并且(2.4.28)成立。此外还有：

$$\hat{\lambda}_i g_i(x_0)=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n). \tag{2.4.30}$$

这表明：使$g_i(x_0)<0$的指标i对应的约束在此实际上不起作用。

为了证明，(2.4.30)，一方面，由分离定理，

$$\hat{\lambda}_0 f(x_0) \leqslant \hat{\lambda}_0 f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \hat{\lambda}_i g_i(x_0).$$

因此，

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{\lambda}_i g_i(x_0) \geqslant 0.$$

另一方面，由假设$g_i(x_0) \leqslant 0$，以及$\hat{\lambda}_i \geqslant 0$可见(2.4.30)成立。

以下我们确定使$\hat{\lambda}_0 > 0$的条件。

引理2.4.23 若$\exists \hat{x} \in C$满足：

$$g_i(\hat{x})<0 \qquad (i=1,2,\cdots,n), \tag{2.4.31}$$

则$\hat{\lambda}_0 > 0$。

证 用反证法。倘若不然，$\hat{\lambda}_0 = 0$。由(2.4.29)，(2.4.30)使有

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \hat{\lambda}_i g_i(\hat{x}). \tag{2.4.32}$$

因为$(\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \cdots, \hat{\lambda}_n) \neq \theta$,所以$(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \cdots, \hat{\lambda}_n) \neq (0,0,\cdots,0)$。又$\hat{\lambda}_i \geqslant 0 (i=1,2,\cdots,n)$，联合(2.4.31)便有

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{\lambda}_i g_i(\hat{x}) < 0.$$

这与(2.4.32)矛盾。 ▍

总结以上所述，我们得到下列

定理2.4.24 (Kuhn-Tucker) 设$\mathscr{X}$是一个线性空间，C是$\mathscr{X}$的一个凸子集。又设$f, g_1, \cdots, g_n$是C上的凸泛函，那末在引理2.4.23的假设下，若x_0是问题(P)的解，则必存在实数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geqslant 0$，适合

$$f(x_0)=\min\left\{ f(x)+\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x) \;\middle|\; \forall x \in C \right\},$$

以及 $\qquad \lambda_i g_i(x_0)=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$。

3. 凸泛函的次微分。 Banach 空间$\mathscr{X}$上的一个凸泛函 $f:\mathscr{X}\to\mathbb{R}^1$，一般来说，未必是可微的。然而参照函数的导数与这函数图形的切线斜率之间的关系，我们将利用凸泛函 f 的上方图 epi(f)的承托超平面，来推广导数的概念。

定义2.4.25 设$f:\mathscr{X}\to\mathbb{R}^1$是凸的，$\forall x_0\in\mathscr{X}$，称集合

$$\partial f(x_0)\triangleq\{x^*\in\mathscr{X}^*\,|\,\langle x^*,x-x_0\rangle+f(x_0)\leqslant f(x)\ (\forall x\in\mathscr{X})\}$$

为这函数 f 在 x_0 点的次微分，$\partial f(x_0)$ 中的任意泛函 x^* 称为 f 在 x_0 点的次梯度。

定理2.4.26 若 $f:\mathscr{X}\to\mathbb{R}^1$ 是凸的，并在 $x_0\in\mathscr{X}$ 连续，则 $\partial f(x_0)\neq\varnothing$。

证 在空间 $\mathscr{X}\times\mathbb{R}^1$ 上，考察凸集 epi(f) 与单点集 $\{(x_0,f(x_0))\}$。因为 f 在x_0点连续，所以epi(f)有内点$(x_0,f(x_0)+1)$，并且

$$\{(x_0,f(x_0))\}\cap\{\mathrm{epi}(f)\}^\circ=\varnothing.$$

应用凸集分离定理，有非零元 $(x^*,\xi)\in\mathscr{X}^*\times\mathbb{R}^1$ 分离 epi(f) 与 $\{(x_0,f(x_0))\}$。即有

$$\langle x^*,x_0\rangle+\xi f(x_0)\leqslant\langle x^*,x\rangle+\xi t \quad (\forall (x,t)\in\mathrm{epi}(f))。\quad (2.4.33)$$

从而有(令$x=x_0$及$t=f(x_0)+s(\forall s>0)$)$\xi\geqslant0$。下证 $\xi\neq0$。倘若不然，$\xi=0$，那末由(2.4.33)便有

$$\langle x^*,x_0-x\rangle\leqslant0 \qquad (\forall x\in\mathscr{X}).$$

即得 $x^*=\theta$。这便与(x^*,ξ)的非零性矛盾。于是 $\xi>0$。令 $x_0^*=-x^*/\xi$，即得$x_0^*\in\partial f(x_0)$。

习　　题

2.4.1 设 p 是实线性空间$\mathscr{X}$上的次线性泛函，求证：

(1) $p(\theta)=0$；

(2) $p(-x)\geqslant -p(x)$；

(3) 任意给定 $x_0\in\mathscr{X}$，在 $\mathscr{X}$ 上必有实线性泛函 f，满足

$f(x_0)=p(x_0)$，以及$f(x)\leqslant p(x)(\forall x\in\mathscr{X})$。

2.4.2 设$\mathscr{X}$是由实数列$x=\{a_n\}$全体组成的实线性空间，其元素间相等和线性运算都按坐标定义，并定义

$$p(x)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \qquad (\forall x=\{a_n\}\in\mathscr{X}).$$

求证：$p(x)$是$\mathscr{X}$上的次线性泛函。

2.4.3 设$\mathscr{X}$是复线性空间，p是$\mathscr{X}$上的半模。$\forall x_0\in\mathscr{X}$，$p(x_0)\neq 0$。求证：存在$\mathscr{X}$上的线性泛函$f$满足：

(1) $f(x_0)=1$；

(2) $|f(x)|\leqslant p(x)/p(x_0)(\forall x\in\mathscr{X})$。

2.4.4 设$\mathscr{X}$是B^*空间，$\{x_n\}(n=1,2,3,\cdots)$是$\mathscr{X}$中的点列。如果$\forall f\in\mathscr{X}^*$，数列$\{f(x_n)\}$有界，求证：$\{x_n\}$在$\mathscr{X}$内有界。

2.4.5 设$\mathscr{X}_0$是B^*空间$\mathscr{X}$的闭子空间，求证：

$$\rho(x,\ \mathscr{X}_0)=\sup\ \{|f(x)|\ \ |f\in\mathscr{X}^*,\quad \|f\|=1,\quad f(\mathscr{X}_0)=0\}$$
$$(\forall x\in\mathscr{X}),$$

其中$\rho(x,\mathscr{X}_0)=\inf\limits_{y\in\mathscr{X}_0}\|x-y\|$。

2.4.6 设$\mathscr{X}$是B^*空间。给定$\mathscr{X}$中n个线性无关的元$x_1,x_2,\cdots,x_n$与数域$\mathbf{K}$中的n个数$C_1,C_2,\cdots,C_n$，求证：为了$\exists f\in\mathscr{X}^*$适合$f(x_k)=C_k(k=1,2,\cdots,n)$，以及$\|f\|\leqslant M$，必须且仅须对任意的$a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{K}$，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kC_k\right|\leqslant M\left\|\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right\|.$$

2.4.7 给定B^*空间$\mathscr{X}$中n个线性无关的元素$x_1,x_2,\cdots,x_n$，求证：$\exists f_1,f_2,\cdots,f_n\in\mathscr{X}^*$，使得

$$\langle f_i,x_j\rangle=\delta_{ij}\qquad (i,j=1,2,\cdots,n).$$

2.4.8 设$\mathscr{X}$是线性空间，求证：为了M是$\mathscr{X}$的极大线性子空间，必须且仅须$\dim(\mathscr{X}/M)=1$。

2.4.9 设$\mathscr{X}$是B^*空间，E是$\mathscr{X}$中的非空均衡凸集，f是$\mathscr{X}$上的线性泛函，求证：

$$|f(x)|\leqslant\sup_{y\in E}\operatorname{Re}f(y)\qquad(\forall x\in E).$$

2.4.10 设$\mathscr{X}$是B^*空间，$E\subset\mathscr{X}$是非空的均衡闭凸集，$\forall x_0\in\mathscr{X}\backslash E$。求证：$\exists f\in\mathscr{X}^*$及$a>0$，使得

$$|f(x)|<a<|f(x_0)|\qquad(\forall x\in E).$$

2.4.11 设E,F是B^*空间$\mathscr{X}$中的两个互不相交的非空凸集，并且E是开的和均衡的。求证：$\exists f\in\mathscr{X}^*$，使得

$$|f(x)|<\inf_{y\in F}|f(y)|\qquad(\forall x\in E).$$

2.4.12 设C是B^*空间$\mathscr{X}$中的一个凸集，并设$x_0\in\mathring{C}$，$x_1\in\partial C$，$x_2=m(x_1-x_0)+x_0(m>1)$。求证：$x_2\overline{\in}C$。

2.4.13 设M是B^*空间$\mathscr{X}$中的闭凸集，求证：$\forall x\in\mathscr{X}\backslash M$，必$\exists f_1\in\mathscr{X}^*$，满足$\|f_1\|=1$，并且

$$\sup_{y\in M}f_1(y)\leqslant f_1(x)-d(x),$$

其中$d(x)=\inf\limits_{z\in M}\|x-z\|$。

2.4.14 设M是B^*空间$\mathscr{X}$内的闭凸集，求证：

$$\inf_{z\in M}\|x-z\|=\sup_{\substack{f\in\mathscr{X}^*\\\|f\|=1}}\left\{f(x)-\sup_{z\in M}f(z)\right\}\qquad(\forall x\in\mathscr{X}).$$

2.4.15 设$\mathscr{X}$是一个B空间，$f:\mathscr{X}\to\overline{\mathbb{R}^1}(\triangleq\mathbb{R}^1\cup\{\infty\})$是连续的凸泛函并且$f(x)\not\equiv\infty$。若定义$f^*:\mathscr{X}^*\to\overline{\mathbb{R}^1}$为

$$f^*(x^*)=\sup_{x\in\mathscr{X}}\{\langle x^*,x\rangle-f(x)\}\qquad(\forall x^*\in\mathscr{X}^*),$$

求证：$f^*(x^*)\not\equiv\infty$。

2.4.16 设$\mathscr{X}$是B空间，$x(t):[a,b]\to\mathscr{X}$是连续的抽象函数。又设Δ表示$[a,b]$的分割：

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b,$$

$\|\Delta\|\triangleq\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}\{|t_{i+1}-t_i|\}$。求证：在$\mathscr{X}$中存在极限

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)(t_{i+1}-t_i)$$

(此极限称为抽象函数$x(t)$在$[a,b]$上的Rieman 积分)。

2.4.17 设$\mathscr{X}$是Banach空间；设G是由C中的简单闭曲线L围成的开区域。如果$x(z):\overline{G}\to\mathscr{X}$在$G$内解析①，且在$\overline{G}$上连续。求证：(推广的Gauchy定理)

$$\int_L x(z)dz = 0.$$

2.4.18 求证：(1) $|x|$在$\mathbb{R}^1$中是凸的；

(2) $|x|$在$x=0$点的次微分$\partial|x|(0)=[-1,1]$。

§5 共轭空间·弱收敛·自反空间

5.1 共轭空间的表示及应用 (Runge 定理)

定义2.5.1 设$\mathscr{X}$是一个B^*空间，$\mathscr{X}$上的所有连续线性泛函全体(见定义2.1.12)，按范数

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1}|f(x)|$$

构成一个B空间，称为$\mathscr{X}$的共轭空间。

注 $\mathscr{X}^*$的完备性直接根据定理2.1.13：$\mathscr{X}^*=\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathbb{K})$导出。

例2.5.2 $L^p[0,1]$的共轭空间($1\leqslant p<\infty$)。设q是p的共轭数，即

$$\begin{cases}\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1 & (若p>1),\\ q=\infty & (若p=1).\end{cases}$$

我们将证：
$$L^p[0,1]^* = L^q[0,1]. \tag{2.5.1}$$

① 即$x(z)$在G内每点可微(参看§2.4.3第一段)。换句话说，$\forall z_0\in G$，在$\mathscr{X}$中存在极限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{x(z)-x(z_0)}{z-z_0}.$$

对于$\forall g\in L^q[0,1]$，根据Hölder 不等式

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)d\mu\right|\leqslant\left(\int_0^1|f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|g(x)|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

(μ是$[0,1]$上的Lebesgue测度)，我们知道：

$$F_g(f)\triangleq\int_0^1 f(x)g(x)d\mu \qquad (\forall f\in L^p[0,1]) \quad (2.5.2)$$

定义了$L^p[0,1]$上的一个线性连续泛函，并有

$$\|F_g\|_{L^p[0,1]^*}\leqslant\|g\|_{L^q[0,1]}. \qquad (2.5.3)$$

即映射$g\mapsto F_g$将$L^q[0,1]$连续地嵌入$L^p[0,1]^*$。

以下证明映射$g\mapsto F_g$是等距在上的。这也就是，对给定的$F\in L^p[0,1]^*$，要找一个$g\in L^q[0,1]$，使得

$$F(f)=\int_0^1 f(x)g(x)d\mu \quad (\forall f\in L^p[0,1]), \qquad (2.5.4)$$

并且
$$\|g\|_{L^q[0,1]}=\|F\|. \qquad (2.5.5)$$

对任意的可测集$E\subset[0,1]$，令

$$\nu(E)\triangleq F(\chi_E),$$

其中χ_E是E的特征函数：$\chi_E(x)=1$(当$x\in E$)，$\chi_E(x)=0$ (当$x\overline{\in}E$)。

我们验证ν是一个完全可加测度。事实上，易见ν是有限可加的(由于F的可加性)。今设$\{E_n\}\subset[0,1]$，满足：

$$E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots$$

以及
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=\varnothing.$$

那末
$$\begin{aligned}\nu(E_n)&=F(\chi_{E_n})\leqslant\|F\|\,\|\chi_{E_n}\|_{L^p[0,1]}\\&=\|F\|\left(\int_0^1|\chi_{E_n}|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\|F\|\mu(E_n)\to 0 \quad (\text{当}n\to\infty).\end{aligned}$$

此外，同理可知ν关于μ还是绝对连续的。即由$\mu(E)=0$，可以

推出$\nu(E)=0$。

现在应用 Radon-Nikodym 定理，存在可测函数 g， 使得对任意的可测集 E 有

$$\nu(E)=\int_E g d\mu.$$

从而

$$F(\chi_E)=\int_0^1 \chi_E(x)g(x)d\mu.$$

于是对于一切简单函数 f，都有

$$F(f)=\int_0^1 f(x)g(x)d\mu.$$

进一步我们将要证明：

$$\|g\|_{L^q[0,1]}\leqslant\|F\|, \tag{2.5.6}$$

因为一旦(2.5.6)得证，我们立即推得(2.5.4)。事实上，因为简单函数集在 $L^p[0,1]$中是稠密的，所以对 $\forall f\in L^p[0,1]$，存在简单函数列 $f_n\to f(L^p[0,1])$。从而有

$$F(f)=\lim_{n\to\infty}F(f_n),$$

以及

$$\left|\int_0^1[f(x)-f_n(x)]g(x)d\mu\right|$$
$$\leqslant\left(\int_0^1|f(x)-f_n(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|g(x)|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leqslant\|F\|\|f-f_n\|_{L^p[0,1]}\to 0 \quad (当 n\to\infty).$$

亦即

$$F(f)=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)g(x)d\mu=\int_0^1 f(x)g(x)d\mu.$$

于是(2.5.4)得证。

以下分两种情形证明(2.5.6)。

(1) $1<p<\infty$。对 $\forall t>0$，记

$$E_t\triangleq\{x\in[0,1]\mid|g(x)|\leqslant t\}. \tag{2.5.7}$$

令$f=\chi_{E_t}|g|^{q-2}g$，便有

$$\int_{E_t}|g|^q d\mu=\int_0^1 f\cdot g d\mu=F(f)$$

$$\leqslant\|F\|\|f\|_{L^p[0,1]}=\|F\|\left(\int_{E_t}|g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

亦即

$$\left(\int_{E_t}|g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|F\|.$$

令 $t\to\infty$，即得(2.5.6)。

(2) $p=1$。这时 $q=\infty$。对 $\forall\varepsilon>0$，令

$$A\triangleq\{x\in[0,1]\mid|g(x)|>\|F\|+\varepsilon\}.$$

再对 $\forall t>0$，还按(2.5.7)定义 E_t，并令 $f=\chi_{E_t\cap A}\mathrm{sign}\,g$，便有

$$\|f\|_{L^1[0,1]}=\mu(E_t\cap A),$$

并且有

$$\mu(E_t\cap A)(\|F\|+\varepsilon)\leqslant\int_{A\cdot E_t}|g|d\mu$$

$$=\int_0^1 fgd\mu\leqslant\|F\|\mu(E_t\cap A).$$

令 $t\to\infty$，便得

$$\mu(A)(\|F\|+\varepsilon)\leqslant\|F\|\mu(A).$$

由此推出 $\mu(A)=0$，从而

$$\|g\|_{L^\infty[0,1]}\leqslant\|F\|.$$

这就是当 $q=\infty$ 时的(2.5.6)。

注 结论(2.5.1)可以扩充到一般的完全可加的、σ-有限的测度空间，设 (X,Ω,μ) 是一个这样的测度空间，则有

$$L^p(X,\Omega,\mu)^*=L^q(X,\Omega,\mu)\quad(1\leqslant p<\infty).\qquad(2.5.8)$$

例2.5.3 $C[0,1]$的共轭空间。设

$$BV[0,1]\triangleq\left\{g\left|\begin{array}{l}g:[0,1]\to\mathbb{C},\ g(0)=0,\\ g(t)=g(t+0)(\forall t\in[0,1)),\\ \mathrm{var}(g)<\infty\end{array}\right.\right\},$$

其中 $\mathrm{var}(g)=\sup\sum_{j=0}^{n-1}|g(t_{j+1})-g(t_j)|$，这里的上确界是对所有的$[0,1]$分割

$$\Delta: 0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=1 \qquad (2.5.9)$$

来取的。在$BV[0,1]$上赋以范数

$$\|g\|_v=\mathrm{var}(g) \qquad (\forall g\in BV[0,1]),$$

那末$BV[0,1]$是B空间(证明留作习题)。

回顾对$\forall \varphi\in C[0,1]$，$\forall g\in BV[0,1]$，Stieltjes 积分

$$\int_0^1 \varphi(t)dg(t)$$

定义为 $\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(t_j^*)[g(t_{j+1})-g(t_j)]$，其中$\Delta$是$[0,1]$的分割(见(2.5.9))，而

$\|\Delta\|\triangleq\max_{1\leqslant j\leqslant n}|t_j-t_{j-1}|$，　及　$t_j^*\in[t_j,t_{j+1}]$　$(0\leqslant j\leqslant n-1)$。

从定义易见$\forall g\in BV[0,1]$，它对应着$C[0,1]$上的一个线性连续泛函

$$\varphi\mapsto\langle f,\varphi\rangle=\int_0^1\varphi(t)dg(t),$$

满足

$$\|f\|\leqslant\int_0^1|dg(t)|=\mathrm{var}(g)=\|g\|_v. \qquad (2.5.10)$$

现在我们要证明反过来的结论。这也就是说，对任意的$f\in C[0,1]^*$，必$\exists\, g\in BV[0,1]$，使得

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_0^1\varphi(t)dg(t) \qquad (\forall\varphi\in C[0,1]), \quad (2.5.11)$$

并且

$$\|g\|_v\leqslant\|f\|. \qquad (2.5.12)$$

其中关键的步骤在于如何由f确定出g。事实上，如果允许φ可以取成间断的特征函数，$\chi_E(t)$ $(E\subset[0,1])$，那末就有

$$g(s)=\int_0^1\chi_{[0,s]}(t)dg(t).$$

因此，先把$C[0,1]$看成是$L^\infty[0,1]$的一个闭子空间，应用 Hahn-

Banach定理，对给定的$f\in C[0,1]^*$，$\exists \tilde{f}\in L^\infty[0,1]^*$使得

$$\langle \tilde{f},\chi_{\{0\}}\rangle = 0,$$

$$\langle \tilde{f},\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle \qquad (\forall \varphi\in C[0,1]),$$

并且$\|\tilde{f}\| = \|f\|$。因为$\chi_{(0,s]}\in L^\infty[0,1]$，所以可以令

$$\left.\begin{aligned} g(s) &= \langle \tilde{f},\chi_{(0,s]}\rangle \qquad (0<s\leqslant 1), \\ g(0) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.5.13}$$

以下证明由（2.5.13）定义的$g\in BV[0,1]$，并适合（2.5.11）与（2.5.12）。

对$[0,1]$的任一分割Δ：$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=1$。记

$$\omega_k \triangleq g(t_{k+1})-g(t_k) \qquad (k=0,1,2,\cdots,n-1),$$

$$\lambda_k \triangleq \begin{cases} \bar{\omega}_k/\omega_k & (\omega_k\neq 0), \\ 0 & (\text{其它}) \end{cases} \qquad (k=0,1,2,\cdots,n-1),$$

$$h_\Delta(t) \triangleq \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\ \chi_{(t_k,t_{k+1}]}(t)\ .$$

我们有

$$\sum_{k=0}^{n-1}|\omega_k| = \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\omega_k = \langle \tilde{f},h_\Delta\rangle$$

$$\leqslant \|\tilde{f}\|\ \|h_\Delta\|_{L^\infty[0,1]} \leqslant \|\tilde{f}\| = \|f\|,$$

即得$g\in BV[0,1]$，并适合(2.5.12)。

为了证明(2.5.11)成立，对$\forall\varphi\in C[0,1]$及$\forall\varepsilon>0$，取分割Δ使得

$$|\varphi(t)-\varphi(t')|<\frac{\varepsilon}{2\|\tilde{f}\|} \quad (\forall t,t'\in[t_j,t_{j+1}],j=0,1,\cdots,n-1),$$

以及

$$\left|\int_0^1\varphi(t)dg(t)-\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(t_j)(g(t_{j+1})-g(t_j))\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令

$$\varphi_{\Delta} \triangleq \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(t_j)\chi_{(t_j, t_{j+1}]} + \varphi(0)\chi_{\{0\}}.$$

便得

$$|\langle f, \varphi\rangle - \int_0^1 \varphi(t)dg(t)|$$

$$\leqslant |\langle f, \varphi\rangle - \langle \tilde{f}, \varphi_{\Delta}\rangle| + |\langle \tilde{f}, \varphi_{\Delta}\rangle - \int_0^1 \varphi(t)dg(t)|$$

$$\leqslant \|\tilde{f}\| \, \|\varphi - \varphi_{\Delta}\|_{L^{\infty}[0,1]} + \left| \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(t_j)(g(t_{j+1}) - g(t_j)) \right.$$

$$\left. - \int_0^1 \varphi(t)dg(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

由 ε 的任意性，即得(2.5.11)。

总结起来有，$g \mapsto \int_0^1 \varphi(t)dg(t)$ 是 $BV[0,1] \to C[0,1]^*$ 的一个等距同构。换句话说

$$C[0,1]^* = BV[0,1]. \qquad (2.5.14)$$

注 我们可用测度或更一般的完全可加集函数代替有界变差函数得到下面更为一般的定理：

定理2.5.4(Riesz表示定理) 若M是一个Hausdorff 紧空间，则$\forall f \in C(M)^*$，有唯一的复值 Baire 测度，即完全可加的集函数μ，适合$|\mu|(M) < \infty$，满足

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_M \varphi(m)d\mu \qquad (\forall \varphi \in C(M)).$$

应用 作为Hahn-Banach 定理和 Riesz 表示定理对复变逼近论的应用，我们来证明下列颇为深刻的Runge 定理。

定理 2.5.5 (Runge) 设 K 是复平面$\mathbf{C}$上的一个紧子集，记 $\mathbf{C}_{\infty} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$。又设 E 是$\mathbf{C}_{\infty} \backslash K$中的一个子集，它与 $\mathbf{C}_{\infty} \backslash K$ 的每一个分量 (component) 都相交。若 f 是K的一个邻域内的任意解析函数，则必有有理函数列f_n，其极点都在E内，使得f_n 在K上一致收敛到 f。

证 证明的办法是引用 K 上的连续函数空间 $C(K)$，并记 $R(K,E)$ 为极点在 E 内的有理函数集在 $C(K)$ 中的闭包。显然，$R(K,E)$ 是 $C(K)$ 的一个闭线性子空间。因此，为了证 $f\in R(K,E)$，只须证：对 $\forall F\in C(K)^*$，

$$F(g)=0(\forall g\in R(K,E))\Rightarrow F(f)=0$$

（见Hahn-Banach 定理的推论2.4.8）。然而 $C(K)^*$ 是由 K 上的完全可加的复值测度 $M(K)$ 组成（见Riesz 表示定理2.5.4），于是我们只须证：对 $\forall \mu\in M(K)$，

$$\int_K g d\mu=0(\forall g\in R(K,E))\Rightarrow \int_K f d\mu=0. \qquad (2.5.15)$$

为此，我们需要如下引理：

引理2.5.6 对 $\forall \mu\in M(K)$，若设

$$\hat{\mu}(w)=\int_K \frac{d\mu(z)}{w-z},$$

那末对 $\forall R>0$，$\hat{\mu}\in L^1(B_R)$（其中 B_R 是中心在原点的半径为 R 的圆），且 $\hat{\mu}$ 在 $\mathbb{C}_\infty\backslash K$ 上解析，还满足 $\hat{\mu}(\infty)=0$。

我们暂时承认这个引理，从而得到

$$\left(\frac{d}{dw}\right)^n\hat{\mu}(w_0)=n!\int_K(z-w_0)^{-n+1}d\mu(z)(\forall w_0\in\mathbb{C}\backslash K),(2.5.16)$$

而在∞点附近它有展开

$$\hat{\mu}(w)=-\frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty}\int_K\left(\frac{z}{w}\right)^n d\mu(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{w^{n+1}}, \qquad (2.5.17)$$

其中 $a_n=\int_K z^n d\mu(z)$。进一步如果 $\mu\in M(K)$ 使得

$$\int_K g(z)d\mu(z)=0, \qquad (2.5.18)$$

其中 g 是极点在 E 内的有理函数，那末我们有

$$\hat{\mu}(w)=0 \qquad (\forall w\in\mathbb{C}_\infty\backslash K). \qquad (2.5.19)$$

事实上，$\forall w_0\in E$，设 $\Omega(w_0)$ 是 $\mathbb{C}_\infty\backslash K$ 中含 w_0 的分量，由关于 E 的

假设，我们有

$$C_\infty \setminus K = \bigcup_{w_0 \in E} \Omega(w_0). \tag{2.5.20}$$

如果$w_0 \neq \infty$，由(2.5.16)与假设(2.5.18)，$\hat{\mu}$在w_0的各阶导数均为0，从而$\hat{\mu}$在$\Omega(w_0)$内恒为0；如果$w_0=\infty$，则由(2.5.17)与假设(2.5.18)，$\hat{\mu}$在$\Omega(w_0)$内也恒为0。于是由(2.5.20)即得(2.5.19)。

现在我们考察在K的某邻域G内解析的任意函数f，对它存在含于$G\setminus K$内的折线$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$使得

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

从而由Fubini定理，

$$\begin{aligned}\int_K f(z) d\mu(z) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_K \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w-z} dw d\mu(z) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} f(w) \hat{\mu}(w) dw = 0,\end{aligned} \tag{2.5.21}$$

这是因为$\hat{\mu}(w)=0$于$\gamma_k \subset \mathbb{C}\setminus K$上。这样，我们已从(2.5.18)推出(2.5.21)，也就是证明了(2.5.15)。

引理2.5.6的证明　(1) 证$\hat{\mu} \in L^1(B_R)$。由定义我们有

$$|\hat{\mu}(w)| \leqslant \int_K \frac{d|\mu|(z)}{|w-z|}.$$

从而

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |\hat{\mu}(w)| dxdy &\leqslant \int_{B_R} \int_K \frac{d|\mu|(z)}{|w-z|} dxdy \\ &= \int_K \int_{B_R} \frac{dxdy}{|w-z|} d|\mu|(z) \quad \text{(用Fubini定理)} \\ &\leqslant \int_K \int_{B(z,\rho)} \frac{dxdy}{|w-z|} d|\mu|(z) \\ &\leqslant 2\pi\rho |\mu|(K) < \infty,\end{aligned}$$

其中 $\rho>R+\max_{z\in K}|z|$。

(2) $\hat\mu$在$\mathbb{C}\backslash K$解析。这是由于K紧，所以可以在积分号下求微商。

(3) $\hat\mu$在$\{\infty\}$解析，且$\hat\mu(\infty)=0$。这是因为K紧，当$|w|\to\infty$时，在积分号下取极限，便得$\hat\mu(w)\to 0$，于是∞是可去奇点。∎

第二共轭空间与自反性 因为B空间$\mathscr{X}$的共轭空间$\mathscr{X}^*$还是一个B空间，所以我们还可以考虑$\mathscr{X}^*$的共轭空间，记作$\mathscr{X}^{**}$，称为$\mathscr{X}$的**第二共轭空间**。注意到$\forall x\in\mathscr{X}$，可以定义

$$X(f)=\langle f,x\rangle \qquad (\forall f\in\mathscr{X}^*). \tag{2.5.22}$$

不难验证：X还是$\mathscr{X}^*$上的一个线性泛函，满足：

$$|X(f)|\leqslant\|f\|\|x\|.$$

从而X还是连续的，满足

$$\|X\|\leqslant\|x\|. \tag{2.5.23}$$

称映射T：$x\to X$为**自然映射**，(2.5.23)表明T是$\mathscr{X}$到$\mathscr{X}^{**}$的连续嵌入。注意到若$\alpha,\beta\in\mathbb{C}$，$x,y\in\mathscr{X}$，记$X=Tx$，$Y=Ty$，则有

$$\begin{aligned}T(\alpha x+\beta y)(f)&=f(\alpha x+\beta y)\\&=\alpha f(x)+\beta f(y)=\alpha X(f)+\beta Y(f)\\&=(\alpha X+\beta Y)(f)=(\alpha Tx+\beta Ty)(f)\quad(\forall f\in\mathscr{X}^*).\end{aligned}$$

因此，T还是一个线性同构。又应用Hahn-Banach定理，$\exists f\in\mathscr{X}^*$，使得

$$\|f\|=1,\qquad 且\langle f,x\rangle=\|x\|,$$

便得到 $$\|x\|=X(f)\leqslant\|X\|\|f\|=\|X\|. \tag{2.5.24}$$

联合(2.5.23)与(2.5.24)便知T是等距的。于是得到：

定理2.5.7 B空间$\mathscr{X}$与它的第二共轭空间$\mathscr{X}^{**}$的一个闭子空间等距同构。

注 有时，我们对x与X不加区别，简单写成$\mathscr{X}\subset\mathscr{X}^{**}$。

定义2.5.8 如果$\mathscr{X}$到$\mathscr{X}^{**}$的自然映射T是满射的，则称$\mathscr{X}$是**自反的**，记作$\mathscr{X}=\mathscr{X}^{**}$。

由前面的具体函数空间的共轭空间的例子可见：当$1<p<\infty$时，空间$L^p(\Omega,\mathscr{B},\mu)$是自反的；但是当$p=1$，$\infty$时，不是自反的。

5.2　**共轭算子**

共轭算子概念是有穷维空间中转置矩阵概念的推广。一个$n\times m$矩阵$A=(a_{ij})$可以看成由$\mathbb{K}^m\to\mathbb{K}^n$的线性算子：

$$(Ax)_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j\quad(\forall\, x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in\mathbb{K}^m,\ i=1,2,\cdots,n).$$

其转置矩阵定义为$m\times n$矩阵$A^*=(a_{ji})$，作为$\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m$的线性算子：

$$(A^*y)_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ji}y_i\quad(\forall\, y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{K}^n,\ j=1,2,\cdots,m).$$

怎样把这关系推广到一般的B空间？这要利用对偶关系。事实上，我们有关系式

$$\langle y,Ax\rangle_n=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j\Big)y_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_jy_i$$
$$=\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}y_i\Big)x_j=\langle A^*y,x\rangle_m,$$

这里

$$\langle y,z\rangle_n=\sum_{i=1}^{n}y_iz_i\quad(\forall\, y=(y_1,y_2,\cdots,y_n),\ z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in\mathbb{K}^n),$$

$$\langle w,x\rangle_m=\sum_{j=1}^{m}w_jx_j\quad(\forall\, w=(w_1,w_2,\cdots,w_m),\ x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in\mathbb{K}^m).$$

这启发我们通过共轭空间来定义共轭算子。

定义2.5.9（共轭算子）　设$\mathscr{X},\mathscr{Y}$是B^*空间，算子$T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$。算子$T^*:\mathscr{Y}^*\longrightarrow\mathscr{X}^*$称为是$T$的共轭算子是指：

$$f(Tx)=(T^*f)(x)\qquad(\forall f\in\mathscr{Y}^*,\ \forall x\in\mathscr{X}).$$

注 $\forall T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，$T^*$是唯一存在的，并且属于$\mathscr{L}(\mathscr{Y}^*,\mathscr{X}^*)$。事实上，对$\forall f\in\mathscr{Y}^*$，令

$$g(x)=f(Tx)\qquad(\forall x\in\mathscr{X}),$$

它是线性的，并且有界：

$$|g(x)|\leqslant\|f\|\|T\|\|x\|\qquad(\forall x\in\mathscr{X}).$$

因此$g\in\mathscr{X}^*$，对应$f\mapsto g$又是线性的，正是T^*。按定义，

$$\|T^*f\|=\|g\|\leqslant\|T\|\|f\|\qquad(\forall f\in\mathscr{Y}^*).\tag{2.5.25}$$

因此，$T^*\in\mathscr{L}(\mathscr{Y}^*,\mathscr{X}^*)$。(2.5.25)还蕴含

$$\|T^*\|\leqslant\|T\|.\tag{2.5.26}$$

因此，T^*的唯一性显然。事实上还有

定理2.5.10 映射$*:T\mapsto T^*$是$\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$到$\mathscr{L}(\mathscr{Y}^*,\mathscr{X}^*)$内的等距同构。

证 (1) 证对应$*:T\mapsto T^*$是线性的：

$$\begin{aligned}[(\alpha_1T_1+\alpha_2T_2)^*f](x)&=f[(\alpha_1T_1+\alpha_2T_2)x]\\&=\alpha_1f(T_1x)+\alpha_2f(T_2x)=[(\alpha_1T_1^*+\alpha_2T_2^*)f](x)\end{aligned}$$

$(\forall x\in\mathscr{X},\forall f\in\mathscr{Y}^*,\forall\alpha_1,\alpha_2\in\mathbf{K})$.

(2) 再证等距。已有(2.5.26)，只要再证$\|T\|\leqslant\|T^*\|$。对$\forall x\in\mathscr{X}$，若$Tx\neq\theta$，由Hahn-Banach定理的推论2.4.6，必有$f\in\mathscr{Y}^*$，使得

$$f(Tx)=\|Tx\|,\qquad 且\ \|f\|=1.$$

从而

$$\begin{aligned}\|Tx\|&=f(Tx)=(T^*f)(x)\\&\leqslant\|T^*f\|\|x\|\leqslant\|T^*\|\|x\|,\end{aligned}$$

即得$\|T\|\leqslant\|T^*\|$。∎

同样对T^*还可以再考察它的共轭算子$T^{**}=(T^*)^*\in\mathscr{L}(\mathscr{X}^{**},\mathscr{Y}^{**})$。注意到$\mathscr{X}\subset\mathscr{X}^{**}$，$\mathscr{Y}\subset\mathscr{Y}^{**}$，并设它们的自然嵌入映射分别为$U$和$V$，那末

$$\begin{aligned}\langle T^{**}Ux,f\rangle&=\langle Ux,T^*f\rangle\\&=\langle T^*f,x\rangle=\langle f,Tx\rangle\\&=\langle VTx,f\rangle\qquad(\forall f\in\mathscr{Y}^*,\forall x\in\mathscr{X}).\end{aligned}$$

从而有 $T^{**}Ux=VTx$。即 T^{**} 是 T 在 $\mathscr{X}^{**}$ 上的扩张。于是有

定理2.5.11 设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 B^* 空间，$T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，那末 $T^{**}\in\mathscr{L}(\mathscr{X}^{**},\mathscr{Y}^{**})$ 是 T 在 $\mathscr{X}^{**}$ 上的延拓，并满足 $\|T^{**}\|=\|T\|$。

例2.5.12 设 $(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 是一个测度空间，又设 $K(x,y)$ 是 $\Omega\times\Omega$ 上的二元平方可积函数：

$$\iint_{\Omega\times\Omega}|K(x,y)|^2d\mu(x)d\mu(y)<\infty.$$

定义算子

$$T:u\mapsto(Tu)(x)=\int_\Omega K(x,y)u(y)d\mu(y)\quad(\forall u\in L^2(\Omega,\mu)),$$

便有 $T\in\mathscr{L}(L^2(\Omega,\mu))$，并且

$$(T^*v)(x)=\int_\Omega K(y,x)v(y)d\mu(y)\quad(\forall v\in L^2(\Omega,\mu)).$$

这是因为

$$\|Tu\|^2=\int_\Omega\left|\int_\Omega K(x,y)u(y)d\mu(y)\right|^2d\mu(x)$$

$$\leqslant\int_\Omega\left[\int_\Omega|K(x,y)|^2d\mu(y)\int_\Omega|u(y)|^2d\mu(y)\right]d\mu(x)$$

$$\leqslant\left[\iint_{\Omega\times\Omega}|K(x,y)|^2d\mu(x)d\mu(y)\right]\|u\|^2$$

$$(\forall u\in L^2(\Omega,\mu)),$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 $L^2(\Omega,\mu)$ 上的范数；以及

$$\langle T^*v,u\rangle=\langle v,Tu\rangle$$

$$=\int_\Omega\left[\int_\Omega K(x,y)u(y)d\mu(y)\right]v(x)d\mu(x)$$

$$\overset{①}{=}\iint_{\Omega\times\Omega}K(x,y)u(y)v(x)d\mu(x)d\mu(y)$$

$$=\int_{\Omega}\left[\int_{\Omega}K(x,y)v(x)d\mu(x)\right]u(y)d\mu(y)$$

$(\forall u,v\in L^2(\Omega,\mu))$。所以

$$(T^*v)(y)=\int_{\Omega}K(x,y)v(x)d\mu(x)\quad(\forall v\in L^2(\Omega,\mu)).$$

注 理由①是因为

$$\iint_{\Omega\times\Omega}|K(x,y)||u(y)||v(x)|d\mu(x)d\mu(y)$$

$$\leqslant\|u\|\|v\|\left(\iint_{\Omega\times\Omega}|K(x,y)|^2d\mu(x)d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}}<\infty,$$

所以可以应用 Fubini 定理。∎

我们再来考察卷积算子和它的共轭算子。

例2.5.13 设 $K(x)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的 L^1 函数，考察 $L^p(\mathbf{R}^1)(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 上的卷积算子：

$$(K*f)(x)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y)f(y)dy,$$

并求其共轭。首先证明 $K*$ 是 $L^p(\mathbf{R}^1)$ 到自身的有界线性算子。为此我们需要如下

引理2.5.14（Young 不等式） 设 $f\in L^p(\mathbf{R}^1)(1\leqslant p\leqslant\infty)$，$K\in L^1(\mathbf{R}^1)$，则

$$\|K*f\|_p\leqslant\|K\|_1\|f\|_p,\tag{2.5.27}$$

其中 $\|\cdot\|_p$ 表示 $L^p(\mathbf{R}^1)$ 的范数 $(1\leqslant p\leqslant\infty)$。

证 当 $1<p<\infty$ 时，由 Hölder 不等式，

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y)f(y)dy\right|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|K(x-y)|^{\frac{1}{q}}|K(x-y)|^{\frac{1}{p}}|f(y)|dy$$

$$\leqslant\left(\int_{-\infty}^{\infty}|K(x-y)|dy\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|K(x-y)||f(y)|^pdy\right)^{\frac{1}{p}},$$

而 $$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y)f(y)dy\right|^pdx$$

$$\leqslant \|K\|_1^{\frac{p}{q}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |K(x-y)|\,|f(y)|^p dy dx$$

$$= \|K\|_1^{\frac{p}{q}} \|f\|_p^p \|K\|_1.$$

由 Fubini 定理，$(K*f)(x)$a.e. 存在有限，而且 (2.5.27) 成立。

当 $p=1$ 或∞ 时。不等式 (2.5.27) 是显然的。 ▌

现在我们来求 $K*$ 的共轭算子的表示.若记 $\check{K}(x)\triangleq K(-x)$，则由 Fubini 定理，我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)f(y)\,dy\right]g(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left[\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)g(x)\,dx\right]dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(\check{K}*g)(y)f(y)dy.$$

由此可见 $T\triangleq K*$ 的共轭算子 $T^*=\check{K}*$。

注 以上考虑的共轭空间和共轭算子都是在实数域上的共轭。若用复数域，则每个 L^q 函数 g 对应着 L^p 空间上的一个反线性连续泛函：

$$F_g(f)=\int_\Omega f\bar{g}d\mu.$$

这时的复共轭算子为$T^*=\overline{\check{K}}*$。

5.3 弱收敛及 * 弱收敛

泛函分析主要研究无穷维空间的算子与泛函。而有穷维 Banach 空间与无穷维 Banach 空间的根本区别之一是：在有穷维空间中，任意有界点列必有收敛子列，但在无穷维空间中不具备这条性质（见推论1.4.30）。为了使有些有穷维空间具备的性质能够过渡到无穷维空间中去，我们引进弱收敛与 * 弱收敛的概念。

本节定理2.5.28与2.5.29给出在弱收敛及*弱收敛意义下，上述基本性质在无穷维空间中的推广。

定义2.5.15 设$\mathscr{X}$是一个B^*空间，$\{x_n\}\subset\mathscr{X}$，$x_0\in\mathscr{X}$。称$\{x_n\}$弱收敛到$x$，记作$x_n\rightharpoonup x$，是指：对于$\forall f\in\mathscr{X}^*$都有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x).$$

这时x称作点列$\{x_n\}$的弱极限。

注1 为区别起见，今后我们称$x_n\to x$(按范数收敛)为x_n强收敛到x，或x是$\{x_n\}$的强极限。

注2 若$\dim\mathscr{X}<\infty$，则弱收敛与强收敛是等价的。事实上，设$e_1,e_2,\cdots,e_m$是$\mathscr{X}$的一组基，并设

$$x_n=\xi_1^{(n)}e_1+\xi_2^{(n)}e_2+\cdots+\xi_m^{(n)}e_m\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$x=\xi_1^{(0)}e_1+\xi_2^{(0)}e_2+\cdots+\xi_m^{(0)}e_m.$$

取$f_i\in\mathscr{X}^*(i=1,2,\cdots,m)$，使得$f_i(e_j)=\delta_{ij}(i,j=1,2,\cdots,m)$(见习题2.4.7)，便有

$$f_i(x_n)=\xi_i^{(n)}\quad与\quad f_i(x)=\xi_i^{(0)}\quad(i=1,2,\cdots,m).$$

今若$x_n\rightharpoonup x$，则有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)\quad(\forall f\in\mathscr{X}^*)$，从而也有

$$\lim_{n\to\infty}f_i(x_n)=f_i(x)\quad(i=1,2,\cdots,m),$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}=\xi_i^{(0)}(i=1,2,\cdots,m).$$

换句话说就是x_n按其坐标收敛于x。反过来，若x_n按其坐标收敛于x，那末$x_n\to x$(见定理1.4.18)，由如下命题便推出$x_n\rightharpoonup x$。

命题2.5.16 弱极限若存在必唯一。强极限若存在必是弱极限。

证 (1) 若有$x_n\rightharpoonup x,x_n\rightharpoonup y$，由定义推得

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(y)\qquad(\forall f\in\mathscr{X}^*).$$

利用Hahn-Banach定理推论2.4.5，即得$x=y$。

(2) 若$x_n\to x$，则$\forall f\in\mathscr{X}^*$有

$$|f(x_n)-f(x)|\leqslant\|f\|\|x_n-x\|\to0\qquad(n\to\infty),$$

即得$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x)$。故 $x_n \rightharpoonup x$。 ∎

但反过来，当 $\dim \mathscr{X}=\infty$时，弱极限存在却未必有强极限。

例2.5.17 在 $L^2[0,1]$ 中，设 $x_n=x_n(t)=\sin n\pi t$，则根据 Riemann-Lebesgue 定理，显然有

$$\langle f,x_n\rangle=\int_0^1 f(t)\sin n\pi t\,dt\to 0 \quad (\forall f\in L^2[0,1]).$$

即 $x_n \rightharpoonup \theta$。但$\|x_n\|=1/\sqrt{2}$，不可能有 $x_n\to\theta$。

这表明弱收敛确实是与强收敛不同。然而反过来，若 $x_n \rightharpoonup x$，我们却可以找到$\{x_n\}$的凸组合序列，使其强收敛到 x。这就是

定理2.5.18(Mazur) 设$\mathscr{X}$是一个 B^*空间，$x_n \rightharpoonup x_0$，则

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \lambda_i\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,n),\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1,\ \text{使得}$$

$$\left\|x_0-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right\|\leqslant\varepsilon.$$

证 设$M\triangleq\overline{\mathrm{co}}(\overline{\{x_n\}})$，则 M是 $\mathscr{X}$ 中的一个闭凸集。倘若 $x_0\notin M$，应用Ascoli定理(见推论2.4.16)，$\exists f\in\mathscr{X}^*$及$\alpha\in\mathbf{R}^1$，使得

$$f(x)<\alpha<f(x_0) \qquad (\forall x\in M).$$

从而

$$f(x_n)<\alpha<f(x_0) \qquad (\forall n\in\mathbf{N}).$$

这与$x_n \rightharpoonup x_0$矛盾。 ∎

又既然$\mathscr{X}^*$也是一个 B 空间，在$\mathscr{X}^*$上自然也有两种收敛性：强收敛与弱收敛。所谓弱收敛 $f_n \rightharpoonup f$，是指对 $\forall x^{**}\in\mathscr{X}^{**}$ 都有 $x^{**}(f_n)\to x^{**}(f)$。

有时候为了不涉及$\mathscr{X}^{**}$而是考察$\mathscr{X}$，再引入

定义 2.5.19 设$\mathscr{X}$是 B^*空间，$\{f_n\}\subset\mathscr{X}^*$，$f\in\mathscr{X}^*$。称 f_n $*$弱收敛到 f，记作$w^*-\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$，是指：对于$\forall x\in\mathscr{X}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$。这时 f 称作泛函序列$\{f_n\}$的$*$弱极限。

我们已经指出过：$\mathscr{X}$ 可以连续地嵌入 $\mathscr{X}^{**}$，或者说 $\mathscr{X}\subset$

$\mathscr{X}^{**}$，因此 $\mathscr{X}^*$上的弱收敛蕴含$\mathscr{X}^*$上的 * 弱收敛；而且当 $\mathscr{X}$是一个自反空间时，* 弱收敛与弱收敛等价。

现在把Banach-Steinhaus定理应用到下列特殊情形有

定理2.5.20 设$\mathscr{X}$是一个B空间，又设$\{x_n\}\subset\mathscr{X}$，$x\in\mathscr{X}$，则为了$x_n\rightharpoonup x$，必须且仅须

(1) $\|x_n\|$有界；

(2) 对$\mathscr{X}^*$中的一个稠密子集M^*上的一切f都有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x).$$

证 只须把x_n看成是$\mathscr{X}^*$上的有界线性泛函：

$$\langle x_n,f\rangle\triangleq f(x_n)\qquad(\forall f\in\mathscr{X}^*),$$

应用Banach-Steinhaus 定理（见定理2.3.16）即得结论。

定理2.5.21 设$\mathscr{X}$是一个B^*空间，又设$\{f_n\}\subset\mathscr{X}^*$，$f\in\mathscr{X}^*$，则为了$w^*-\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$，必须且仅须

(1) $\|f_n\|$有界；

(2) 对$\mathscr{X}$中的一个稠密子集M上的一切x都有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x).$$

证 本定理直接是Banach-Steinhaus 定理的特殊情形。▌

类似于线性连续泛函序列，对于线性连续算子序列，$\{T_n\}\subset\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，其中$\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$是$B^*$空间，我们也考察各种收敛性。

定义2.5.22 设$\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$是B^*空间。又设$T_n(n=1,2,\cdots)$，$T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$。

(1) 若$\|T_n-T\|\to0$，则称T_n一致收敛于T，记作$T_n\rightrightarrows T$。这时T称作$\{T_n\}$的一致极限。

(2) 若$\|(T_n-T)x\|\to0(\forall x\in\mathscr{X})$，则称$T_n$强收敛于$T$，记作$T_n\to T$。这时$T$称作$\{T_n\}$的强极限。

(3) 如果对于$\forall x\in\mathscr{X}$，以及$\forall f\in\mathscr{Y}^*$都有

$$\lim_{n\to\infty}f(T_nx)=f(Tx),$$

则称T_n弱收敛于T，记作 $T_n \rightharpoonup T$。这时T称作$\{T_n\}$的弱极限。

显然，一致收敛⇒强收敛⇒弱收敛，而且每种极限若存在必是唯一的。但反过来都不对。

例2.5.23（强收敛而不一致收敛） 在空间 l^2上考察左推移算子

$$T: x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \mapsto Tx = (x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots).$$

令$T_n \triangleq T^n$，便有

$$T_n x = (x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots) \quad (\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in l^2).$$

下面我们证明：$T_n \to 0$，但$T_n \not\rightrightarrows 0$。事实上，若取

$$e_n = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0, 1}_{n}, 0, \cdots),$$

那末 $T_n e_{n+1} = e_1$；并且$\|e_n\| = 1 (\forall n \in \mathbb{N})$。因此

$$\|T_n\| \geqslant \|T_n(e_{n+1})\| = 1,$$

从而$T_n \not\rightrightarrows 0$。但是对$\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in l^2$ 有

$$\|T_n x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_{n+i}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

即 $T_n \to 0$。

例2.5.24（弱收敛而不强收敛） 在空间l^2 上考察右推移算子

$$S: x = (x_1, x_2, \cdots, x_n \cdots) \mapsto Sx = (0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots).$$

令 $S_n \triangleq S^n$，便有

$$S_n x = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n}, x_1, x_2, \cdots) \qquad (\forall x \in l^2).$$

显然，$\|S_n x\| = \|x\| (\forall x \in l^2)$，从而 $S_n \not\to 0$。但是对于 $\forall f = (y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots) \in (l^2)^* = l^2$，我们有

$$|\langle f, S_n x\rangle| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} y_{i+n} x_i\right|$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_{i+n}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x\| \to 0 \qquad (\text{当 } n \to \infty),$$

即有 $S_n \rightharpoonup 0$。

引进弱收敛及 * 弱收敛的目的之一是可以从有界性导出某种紧性。如称集 A 是弱列紧的，是指 A 中的任意点列有一个弱收敛子列。又如称 A 是 * 弱列紧的，是指 A 中的任意点列有一个 * 弱收敛的子列。

下面一个定理是非常容易看出来的。

定理2.5.25 设 $\mathscr{X}$ 是可分的Banach 空间，那末 $\mathscr{X}^*$ 上的任意有界列 $\{f_n\}$ 必有 * 弱收敛的子列。

证 因为 $\mathscr{X}$ 可分，所以 $\mathscr{X}$ 有可数的稠密子集 $\{x_m\}$。因为 $\{f_n\}$ 有界，所以数集

$$\{\langle f_n, x_m\rangle | n, m\in \mathbf{N}\}$$

对每一个固定的 m 是有界的。用对角线法则可以抽出子列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，使得对于 $\forall m\in \mathbf{N}$，

$$\{\langle f_{n_k},\ x_m\rangle\}_{k=1}^{\infty}$$

是收敛数列。再由 $\{x_m\}$ 在 $\mathscr{X}$ 中稠密，以及 $\{f_n\}$ 有界，可见对于 $\forall x\in \mathscr{X}$，

$$\{\langle f_{n_k},\ x\rangle\}_{k=1}^{\infty}$$

是收敛数列。记 $F(x)\triangleq\lim\limits_{k\to\infty}\langle f_{n_k}, x\rangle$。易见 F 是线性的，并且

$$|F(x)|\leqslant\sup_n\|f_n\|\|x\| \qquad (\forall x\in \mathscr{X}).$$

从而有 $f\in \mathscr{X}^*$，使得

$$\langle f, x\rangle = F(x) = \lim_{k\to\infty}\langle f_{n_k}, x\rangle \qquad (\forall x\in \mathscr{X}).$$

即得 $w^*-\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k} = f$。 ▌

为了避免可分性，我们利用空间的自反性假设导出 * 弱列紧性(此时 * 弱列紧与弱列紧是等价的)。先证

定理2.5.26(Banach) 设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间。若 $\mathscr{X}$ 的共轭空间 $\mathscr{X}^*$ 是可分的，则 $\mathscr{X}$ 本身必是可分的。

证 (1) 考察 $\mathscr{X}^*$的单位球面 $S_1^* \triangleq \{f \in \mathscr{X}^* \mid \|f\| = 1\}$。我们指出：$S_1^*$ 是可分的。事实上，由 $\mathscr{X}^*$ 可分，$\exists \{f_n\} \subset \mathscr{X}^*$，使得 $\forall f \in S_1^*$，$\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_k} = f.$$

今令$g_n \triangleq f_n / \|f_n\|$（不妨设$f_n \neq \theta$），便有

$$\|f - g_{n_k}\| \leqslant \|f - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - g_{n_k}\|$$

$$= \|f - f_{n_k}\| + |1 - \|f_{n_k}\|| \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

由此可见S_1^*有可数的稠密子集$\{g_n\}$。

(2) 对于每个g_n，因为$\|g_n\| = 1$，所以可以选取 $x_n \in \mathscr{X}$，使得

$$\|x_n\| = 1，\text{并且 } g_n(x_n) \geqslant \frac{1}{2}.$$

记 $\mathscr{X}_0 \triangleq \overline{\text{span}\{x_n\}}$，它显然是可分的（$x_n$ 的有理系数的线性组合在$\mathscr{X}_0$中稠）。

(3) 证明 $\mathscr{X}_0 = \mathscr{X}$。倘若不然，存在 $x_0 \in \mathscr{X} \backslash \mathscr{X}_0$，不妨设 $\|x_0\| = 1$，利用Hahn-Banach定理2.4.7，$\exists f_0 \in \mathscr{X}^*$，使得

$$\|f_0\| = 1，\text{从而} f_0 \in S_1^*，\text{并且} f_0(x) = 0 (\forall x \in \mathscr{X}_0).$$

对此f_0我们有

$$\|g_n - f_0\| = \sup_{\|x\| = 1} |g_n(x) - f_0(x)|$$

$$\geqslant |g_n(x_n) - f_0(x_n)| = |g_n(x_n)| \geqslant \frac{1}{2}.$$

这与$\{g_n\}$在 S_1^*中稠相矛盾，即得$\mathscr{X} = \mathscr{X}_0$。从而$\mathscr{X}$是可分的。

定理 2.5.27(Pettis) 自反空间$\mathscr{X}$的闭子空间 $\mathscr{X}_0$ 必是自反空间。

证 要证：若$z_0 \in \mathscr{X}_0^{**}$，则必 $z_0 \in \mathscr{X}_0$；也就是要证：$\exists x \in \mathscr{X}_0$，使得

$$\langle z_0, f_0 \rangle = \langle f_0, x \rangle \qquad (\forall f_0 \in \mathscr{X}_0^*). \qquad (2.5.28)$$

令对 $\forall f\in\mathscr{X}^*$，考察 f 在 $\mathscr{X}_0$ 上的限制 $Tf=f_0\in\mathscr{X}_0^*$。因为
$$\|f_0\|\leqslant\|f\|,$$
所以 $T\in\mathscr{L}(\mathscr{X}^*,\mathscr{X}_0^*)$。于是 $z\triangleq T^*z_0\in\mathscr{X}^{**}$，又 $\mathscr{X}$ 自反，因此 $\exists x\in\mathscr{X}$，使得
$$\langle z,f\rangle=\langle f,x\rangle\qquad(\forall f\in\mathscr{X}^*).\tag{2.5.29}$$
今证此 $x\in\mathscr{X}_0$。倘若不然，由 Hahn Banach 定理推论（见定理 2.4.7），$\exists f\in\mathscr{X}^*$，使得
$$f(\mathscr{X}_0)=0,\ \text{且}\langle f,x\rangle=1;$$
从而 $Tf=0$。但这导出矛盾：
$$0=\langle z_0,Tf\rangle=\langle T^*z_0,f\rangle=\langle z,f\rangle=\langle f,x\rangle=1.$$
这就证明了 $\exists x\in\mathscr{X}_0$，使得(2.5.29)成立。现在要证此 x 还适合(2.5.28)。事实上，$\forall f_0\in\mathscr{X}_0^*$，由 Hahn-Banach 定理，存在 $f\in\mathscr{X}^*$，使得 $f_0=Tf$。从而我们有
$$\langle z_0,f_0\rangle=\langle z_0,Tf\rangle=\langle z,f\rangle,$$
以及
$$\langle f_0,x\rangle=\langle f,x\rangle\qquad(\forall x\in\mathscr{X}_0).$$
由此可见，适合(2.5.29)的 x 必适合(2.5.28)。

定理 2.5.28(Eberlein-Шмулян) 自反空间的单位(闭)球是弱(自)列紧的。

证 (1) 我们要证：自反空间 $\mathscr{X}$ 中的任何有界点列 $\{x_n\}$ 必有一个在 $\mathscr{X}$ 中弱收敛的子列。令
$$\mathscr{X}_0\triangleq\overline{\text{span}\{x_n\}}.$$
根据前一定理，因为 $\mathscr{X}$ 自反，所以 $\mathscr{X}_0$ 也是自反的。又显然 $\mathscr{X}_0$ 是可分的，这表明 $(\mathscr{X}_0^*)^*$ 是可分的。再由定理2.5.26，$\mathscr{X}_0^*$ 也是可分的。若记 $\{g_n\}$ 为 $\mathscr{X}_0^{**}$ 中的元列，它适合
$$\langle g_n,f\rangle=\langle f,x_n\rangle\qquad(\forall f\in\mathscr{X}_0^*),\tag{2.5.30}$$
则 $\{\|g_n\|\}$ 有界。设 M_0^* 是 $\mathscr{X}_0^*$ 中的可数稠密子集，用对角线法则，在 $\{g_n\}$ 中可以抽出一子列 $\{g_{n_k}\}$ 及 $\exists g\in\mathscr{X}_0^{**}$，使得
$$\lim_{k\to\infty}\langle g_{n_k},f\rangle=\langle g,f\rangle\qquad(\forall f\in M_0^*).\tag{2.5.31}$$

再依定理2.5.21,(2.5.31)蕴含

$$\lim_{k\to\infty}\langle g_{n_k},f\rangle=\langle g,f\rangle \qquad (\forall f\in\mathscr{X}_0^*). \tag{2.5.32}$$

还由$\mathscr{X}_0$的自反性，$\exists x_0\in\mathscr{X}_0$适合

$$\langle g,f\rangle=\langle f,x_0\rangle \qquad (\forall f\in\mathscr{X}_0^*). \tag{2.5.33}$$

联合(2.5.30),(2.5.32)与(2.5.33)，便得到

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\langle f,x_{n_k}\rangle&=\lim_{k\to\infty}\langle g_{n_k},f\rangle\\&=\langle f,x_0\rangle \qquad (\forall f\in\mathscr{X}_0^*).\end{aligned} \tag{2.5.34}$$

进一步对$\forall \tilde{f}\in\mathscr{X}^*$，记$f\triangleq T\tilde{f}$为$\tilde{f}$在$\mathscr{X}_0$上的限制。因为$\{x_{n_k}\}\subset\mathscr{X}_0$，及$x_0\in\mathscr{X}_0$，依(2.5.34)便有

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\langle\tilde{f},x_{n_k}\rangle&=\lim_{k\to\infty}\langle f,x_{n_k}\rangle\\&=\langle f,x_0\rangle=\langle\tilde{f},x_0\rangle \qquad (\forall\tilde{f}\in\mathscr{X}^*).\end{aligned}$$

即得$x_{n_k}\rightharpoonup x_0$。于是$\mathscr{X}$中的任意有界集是弱列紧集，特别是单位球是弱列紧的。同样，单位闭球也是弱列紧的。

(2) 证明单位闭球是弱自列紧的。设$x_{n_k}\rightharpoonup x_0$，并且$\|x_{n_k}\|\leqslant 1$。由Hahn-Banach定理的推论2.4.6，$\exists f\in\mathscr{X}^*$适合

$$f(x_0)=\|x_0\|, \qquad 且\|f\|=1.$$

因此，我们有

$$\|x_0\|=f(x_0)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})\leqslant\|f\|\sup_{k\geqslant1}\|x_{n_k}\|\leqslant 1.$$

即x_0也在单位闭球内，从而单位闭球是弱自列紧的。

定理2.5.29(Alaoglu) 设$\mathscr{X}$是B^*空间，则$\mathscr{X}^*$中的单位球是$*$弱紧的。

证 请参看下册第五章。∎

应用 $L^p[0,2\pi](1<p<\infty)$函数的Fourier级数的刻划。

设$f\in L^1[0,2\pi]$，我们称

$$c_n\triangleq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-inx}dx \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

为f的Fourier系数；并称级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \qquad (2.5.35)$$

为 f 的Fourier级数。当$f\in L^2[0,2\pi]$时，这级数在 $L^2[0,2\pi]$空间上收敛(见例1.6.26)。一般来说，对于 $L^1[0,2\pi]$ 中的 f，级数(2.5.35)未必收敛。通常我们考察下列Cesaro 和(算术平均和)：

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f)(x)$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} c_k\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e^{ikx} \qquad (2.5.36)$$

其中 $S_n(f)(x)\triangleq\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$。通过初等计算，有

$$\sigma_n(f)(x) = \int_0^{2\pi} f(y)K_n(x-y)dy,$$

其中

$$K_n(x)\triangleq\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e^{ikx}$$

$$=\frac{1}{2\pi(n+1)}\left[\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right]^2,$$

称为 Fejer 核。利用K_n的非负性，以及

$$\int_0^{2\pi} K_n(x)dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\int_0^{2\pi} e^{ikx}dx = 1,$$

按Young不等式（见引理2.5.14)，对$\forall f\in L^p[0,2\pi]$($1\leqslant p<\infty$)，有

$$\|\sigma_n(f)\|_{L^p}\leqslant\|f\|_{L^p}.$$

由此可见，若$f\in L^p$，则其Cesaro 部分和的L^p 模是一致有界的。现在我们要证明反过来的结论，这就是

定理2.5.30 若$1<p\leqslant\infty$，又若级数(2.5.35)的Cesaro 部分

和(2.5.36)的L^p模是一致有界的，即

$$\sup_{n\geq 1}\|\sigma_n\|_{L^p}<\infty. \tag{2.5.37}$$

那末必存在$f\in L^p[0,2\pi]$，使得σ_n是f的Fourier级数的Cesaro部分和。

证 注意到$L^p[0,2\pi]=L^q[0,2\pi]^*$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。而$L^q[0,2\pi]$是可分的。由条件(2.5.37)应用定理2.5.25，可见存在$f\in L^p[0,2\pi]$及子列$\{n_k\}$，使得

$$w^*-\lim_{k\to\infty}\sigma_{n_k}(x)=f(x)\quad(\text{在}L^p[0,2\pi]\text{中}).$$

因为$e^{imx}\in L^q[0,2\pi]$ $(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，所以

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-imx}dx=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sigma_{n_k}(x)e^{-imx}dx$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{|m|}{n_k+1}\right)c_m=c_m,$$

即得$\sigma_n(x)$是f的Fourier级数的Cesaro部分和$\sigma_n(f)(x)$。

习 题

2.5.1 求证：$(l^p)^*=l^q$ $\left(1\leqslant p<\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$。

2.5.2 设C是收敛数列的全体，赋以范数

$$\|\cdot\|:\ \{\xi_k\}\in C\mapsto\sup_{k\geq 1}|\xi_k|,$$

求证：$C^*=l^1$。

2.5.3 设C_0是以0为极限的数列全体，赋以范数

$$\|\cdot\|:\ \{\xi_k\}\in C\mapsto\sup_{k\geq 1}|\xi_k|,$$

求证：$C_0^*=l^1$。

2.5.4 求证：有限维B^*空间必是自反的。

2.5.5 求证：B空间是自反的，当且仅当它的共轭空间是自反的。

2.5.6 设$\mathscr{X}$是B^*空间，T是从$\mathscr{X}$到$\mathscr{X}^{**}$的自然映射，求证：$R(T)$闭的充分且必要条件是$\mathscr{X}$完备。

2.5.7 在l^1中定义算子

$$T:\ (x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\mapsto(0,x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots),$$

求证：$T\in\mathscr{L}(l^1)$并求T^*。

2.5.8 在l^2中定义算子

$$T:\ (x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\mapsto\left(x_1,\ \frac{x_2}{2},\cdots,\frac{x_n}{n},\ \cdots\right),$$

求证：$T\in\mathscr{L}(l^2)$并求T^*。

2.5.9 设H是Hilbert空间，$A\in\mathscr{L}(H)$并满足

$$(Ax,y)=(x,Ay)\qquad(\forall x,y\in H),$$

求证：(1) $A^*=A$；

(2) 若$R(A)$在H中稠密，则方程$Ax=y$，对$\forall y\in R(A)$存在唯一解。

2.5.10 设$\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$是B^*空间，$A\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，又设$A^{-1}$存在且$A^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{Y},\mathscr{X})$，求证：

(1) $(A^*)^{-1}$存在，且$(A^*)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{Y}^*,\mathscr{X}^*)$；

(2) $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$。

2.5.11 设$\mathscr{X},\mathscr{Y},\mathscr{Z}$是$B^*$空间，而$A\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$以及$B\in\mathscr{L}(\mathscr{Y},\mathscr{Z})$，求证：$(AB)^*=B^*A^*$。

2.5.12 设$\mathscr{X},\mathscr{Y}$是B空间，T是$\mathscr{X}$到$\mathscr{Y}$的线性算子，又设对$\forall g\in\mathscr{Y}^*$，$g(Tx)$是$\mathscr{X}$上的线性有界泛函，求证$T$是连续的。

2.5.13 设$\{x_n\}\subset C[a,b]$，$x\in C[a,b]$且$x_n\rightharpoonup x$，求证：

$$\lim_{n\to\infty}x_n(t)=x(t)\qquad(\forall t\in[a,b])(\text{点点收敛})。$$

2.5.14 已知在B^*空间中$x_n\rightharpoonup x_0$，求证：

$$\varliminf_{n\to\infty}\|x_n\|\geqslant\|x_0\|.$$

2.5.15 设H是Hilbert空间，$\{e_n\}$是H的正交规范基，求证：在H中$x_n\rightharpoonup x_0$的充分且必要条件是：

(1) $\|x_n\|$有界;

(2) $(x_n,e_k)\to(x_0,e_k)(n\to\infty)(k=1,2,\cdots)$。

2.5.16 设T_n是空间$L^p(\mathbf{R}^1)$ $(1<p<\infty)$到自身的平移算子:

$(T_n u)(x)=u(x+n)\quad(\forall u\in L^p(\mathbf{R}^1))(n=1,2,\cdots)$,
求证: $T_n\rightharpoonup\theta$但$\|T_n u\|_p=\|u\|_p(\forall u\in L^p(\mathbf{R}^1))$。

2.5.17 设S_n是$L^p(\mathbf{R}^1)(1\leqslant p<\infty)$到自身的算子:

$$(S_n u)(x)=\begin{cases}u(x) & (|x|\leqslant n);\\ 0 & (|x|>n),\end{cases}$$

其中$u\in L^p(\mathbf{R}^1)$是任意的,求证: S_n强收敛于恒同算子I,但不一致收敛到I。

2.5.18 设H是Hilbert空间,在H中$x_n\rightharpoonup x_0$,而且$y_n\to y_0$,求证: $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$。

2.5.19 设$\{e_n\}$是Hilbert空间H中的正交规范集,求证:在H中$e_n\rightharpoonup\theta$,但$e_n\nrightarrow\theta$。

2.5.20 设H是Hilbert空间,求证:在H中$x_n\to x_0$的充分且必要条件是:

(1) $\|x_n\|\to\|x\|$; (2) $x_n\rightharpoonup x$。

2.5.21 求证:在自反的B^*空间中,集合的弱列紧性与有界性是等价的。

2.5.22 求证: B^*空间中的闭凸集是弱闭的,即若M是闭凸集,$\{x_n\}\subset M$,且$x_n\rightharpoonup x_0$,则$x_0\in M$。

2.5.23 设$\mathscr{X}$是自反的B空间,M是$\mathscr{X}$中的有界闭凸集,$\forall f\in\mathscr{X}^*$,求证: f在M上达到最大值和最小值。

2.5.24 设$\mathscr{X}$是自反的B空间,M是$\mathscr{X}$中的非空闭凸集,求证: $\exists x_0\in M$,使得$\|x_0\|=\inf\{\|x\|\,|\,x\in M\}$。

§6 线性算子的谱

线性代数用较大篇幅研究矩阵的本征值。在微分方程和积分

方程理论中也着重讨论了本征值问题。这种研究有两方面的重要性：

(1) 直接来自物理学与工程的需要。例如求振动的频率、判定系统的稳定性等都涉及相应算子的本征值或本征值的分布。在量子力学里，能量算符是L^2空间上的一个自伴算子，其本征值对应着该系统束缚态的能级。特别地，光谱就是某个算子的本征值的分布。

(2) 通过本征值或者更一般的谱的研究来了解算子本身的结构，从而用以刻划相应方程的解的构造。例如，通过矩阵的本征值，我们可以刻划这矩阵的不变子空间、写出它的标准形，并且彻底弄清楚相应齐次或非齐次方程解的结构。

6.1 **定义与例**

现在我们在维数 $\geqslant 1$ 的复 Banach 空间$\mathscr{X}$上，考察线性算子 A：$D(A)\subset\mathscr{X}\to\mathscr{X}$。仿照矩阵，$\lambda\in\mathbf{C}$称为是$A$ **的本征值**，是指$\exists\, x_0\in D(A)\backslash\{\theta\}$适合：

$$Ax_0=\lambda x_0,$$

并称相应的x_0为对应于λ的**本征元**。

从线性代数知道，当 $\dim\mathscr{X}<\infty$ 时，$\forall\lambda\in\mathbf{C}$ 只有两种可能性：

(1) 或者 λ 是本征值；

(2) 或者$(\lambda I-A)^{-1}$作为矩阵存在，即$(\lambda I-A)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$。

定义2.6.1 设$\mathscr{X}$是B^*空间，$A: D(A)\subset\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 是闭线性算子，称集合

$$\rho(A)\triangleq\{\lambda\in\mathbf{C}\,|\,(\lambda I-A)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X})\}$$

为A的**预解集**，$\rho(A)$中的λ称为A**的正则值**。

由定义，在 $\dim\mathscr{X}<\infty$ 的情形下，$\forall\lambda\in\mathbf{C}$，它或是$A$的本征值，或是正则值，二者必居其一。

但当 $\dim\mathscr{X}=\infty$时，情况就复杂多了。从逻辑上分，有如下几种情形：

(1) $(\lambda I-A)^{-1}$ 不存在。这相当于 λ 是本征值；

(2) $(\lambda I-A)^{-1}$ 存在，且值域 $R(\lambda I-A)\triangleq(\lambda I-A)D(A)=\mathscr{X}$。这相当于 λ 是正则值（Banach逆算子定理）；

(3) $(\lambda I-A)^{-1}$ 存在，$R(\lambda I-A)\neq\mathscr{X}$，但 $\overline{R(\lambda I-A)}=\mathscr{X}$。对于这部分 λ，我们称之为 A 的连续谱。

(4) $(\lambda I-A)^{-1}$ 存在，且 $\overline{R(\lambda I-A)}\neq\mathscr{X}$，这部分 λ 称之为 A 的剩余谱。

记 $\sigma(A)\triangleq\mathbb{C}\backslash\rho(A)$，并称 $\sigma(A)$ 为 A 的谱集。$\sigma(A)$ 中的点称为 A 的谱点。对应于(1)中的那部分 λ 的集合，记作 $\sigma_p(A)$，称为 A 的点谱。A 的连续谱记作 $\sigma_c(A)$，A 的剩余谱记作 $\sigma_r(A)$。因此有：

$$\sigma(A)=\sigma_p(A)\cup\sigma_c(A)\cup\sigma_r(A).$$

以下举例说明，当 $\dim\mathscr{X}=\infty$ 时，上述各种类型的谱都可能出现。

例2.6.2 设 $\mathscr{X}=L^2[0,1]$，$A: u(t)\mapsto-\dfrac{d^2}{dt^2}u(t)$，其中

$$D(A)=\{u\in C^2[0,1]\,|\,u(0)=u(1),u'(0)=u'(1)\},$$

则 A 是闭线性算子，且

$$\sigma(A)=\sigma_p(A)=\{(2n\pi)^2\,|\,n=0,1,2,\cdots\}.$$

证 一方面，我们有

$$-\frac{d^2}{dt^2}\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}2n\pi t=(2n\pi)^2\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}2n\pi t\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

另一方面，当 $\lambda\neq(2n\pi)^2$ 时，$\forall f\in L^2[0,1]$，方程

$$\left(-\frac{d^2}{dt^2}-\lambda\right)u(t)=f(t)$$

有唯一解：

$$u(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{C_n}{(2n\pi)^2-\lambda}e^{2\pi i n t},$$

其中

$$C_n=\int_0^1 f(t)e^{-2\pi i n t}dt \qquad (n\in\mathbf{Z}).$$

不难验证：$u\in D(A)$，并且

$$\|u\|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{|C_n|^2}{|(2n\pi)^2-\lambda|^2}\leqslant M_\lambda^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2=M_\lambda^2\|f\|^2,$$

其中
$$M_\lambda=\sup_{n\in\mathbf{Z}}\frac{1}{|(2n\pi)^2-\lambda^2|}<\infty.$$

例2.6.3 设$\mathscr{X}=C[0,1]$，$A:u(t)\to t\cdot u(t)$。这是一个有界线性算子，并且

$$\sigma(A)=\sigma_r(A)=[0,1].$$

证 $\forall\lambda\notin[0,1]$，乘法算子$(\lambda-t)^{-1}$。是有界线性算子，满足：

$$\left\|\frac{1}{\lambda-t}x(t)\right\|\leqslant\sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{1}{\lambda-t}\right|\|x\|;$$

而$\forall\lambda\in[0,1]$，方程

$$(\lambda-t)u(t)=0$$

只有0解，$u(t)\equiv0(\forall t\in[0,1])$，并且为了$v\in R(\lambda I-A)$必须$v(\lambda)=0$，从而$1\notin\overline{R(\lambda I-A)}$。这就证明了：

$$[0,1]\subset\sigma_r(A)\subset\sigma(A)\subset[0,1],$$

即得结论。

例2.6.4 设$\mathscr{X}=L^2[0,1]$，$A:u(t)\to tu(t)$，则A是有界线性算子，并且

$$\sigma(A)=\sigma_c(A)=[0,1].$$

证 和上例类似，仅有的差别在于对$\overline{R(\lambda I-A)}$的刻划。现在，因为$L^2[0,1]$与$C[0,1]$的拓扑不同，从而闭包是不同的。事实上，一方面仍有$1\notin R(\lambda I-A)$，这是因为$(\lambda-t)^{-1}\notin L^2[0,1]$；另一方面，注意到$R(\lambda I-A)$中的函数在$t=\lambda$的任一个小邻域外可以是任意的$L^2[0,1]$函数。从而$\overline{R(\lambda I-A)}=L^2[0,1]$。

6.2 Гельфанд 定理

现在我们来研究谱集 $\sigma(A)$。当 $\dim\mathscr{X}<\infty$ 时，我们知道 $\sigma(A)\neq\varnothing$。这是因为矩阵的本征值就是本征多项式

$$\det(\lambda I-A)=0$$

的根，利用代数基本定理，本征值总是存在的。但是这个方法不能直接推广到无穷维空间。我们只好退一步看，多项式根的存在性可以用解析函数的Liouville定理得证。现在我们也将设法利用解析性。

定义2.6.5 算子值函数 $R_\lambda(A)$: $\rho(A)\to\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 定义为

$$\lambda\mapsto(\lambda I-A)^{-1}\qquad(\forall\lambda\in\rho(A)),$$

称为 A 的**预解式**。

我们要想证明：

(1) $\rho(A)$ 是开集；

(2) $R_\lambda(A)$ 是 $\rho(A)$ 内的算子值解析函数（定义见习题2.4.17）。

为证(1)，需要

引理2.6.6 设 $T\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$，$\|T\|<1$，则 $(I-T)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$，并且

$$\|(I-T)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-\|T\|}. \tag{2.6.1}$$

证 这是压缩映象定理的推论。事实上，$\|(I-T)^{-1}\|\leqslant M$ $\Longleftrightarrow\forall y\in\mathscr{X}$，$\exists|x\in\mathscr{X}$，使得 x 是 $Sx\triangleq y+Tx$ 的不动点，并且 $\|x\|\leqslant M\|y\|$。如今

$$\|Sx-Sx'\|=\|Tx-Tx'\|\leqslant\|T\|\|x-x'\|\quad(\forall x,x'\in\mathscr{X}),$$

即 S 是压缩映象。从而有唯一 $x=Sx=y+Tx$，并且

$$\|x\|\leqslant\frac{\|y\|}{1-\|T\|}.$$

注 事实上，我们有

$$x=\lim_{n\to\infty}S^n y=\sum_{k=0}^{\infty}T^k y. \qquad (2.6.2)$$

即当$\|T\|<1$时，

$$(I-T)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}T^k, \qquad (2.6.3)$$

后者称为Neuman级数。本引理亦可直接通过公式(2.6.2)与(2.6.3)来验证。

推论2.6.7 设A是闭线性算子，则$\rho(A)$是开集。

证 设$\lambda_0\in\rho(A)$，则

$$\begin{aligned}\lambda I-A&=(\lambda-\lambda_0)I+(\lambda_0 I-A)\\&=(\lambda_0 I-A)[I+(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-A)^{-1}].\end{aligned}$$

当$|\lambda-\lambda_0|<\|(\lambda_0 I-A)^{-1}\|^{-1}$时，

$$B\triangleq[I+(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-A)^{-1}]^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X}).$$

从而

$$(\lambda I-A)^{-1}=BR_{\lambda_0}(A)\in\mathscr{L}(\mathscr{X}), \qquad (2.6.4)$$

即得$\lambda\in\rho(A)$。 ▎

以下考虑对$R_\lambda(A)$求导。

引理2.6.8（第一预解公式） 设$\lambda,\mu\in\rho(A)$，则有

$$R_\lambda(A)-R_\mu(A)=(\mu-\lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A). \qquad (2.6.5)$$

证 直接计算，

$$\begin{aligned}(\lambda I-A)^{-1}&=(\lambda I-A)^{-1}(\mu I-A)(\mu I-A)^{-1}\\&=(\lambda I-A)^{-1}((\mu-\lambda)I+\lambda I-A)(\mu I-A)^{-1}\\&=(\mu-\lambda)(\lambda I-A)^{-1}(\mu I-A)^{-1}+(\mu I-A)^{-1}.\end{aligned}$$

定理2.6.9 预解式$R_\lambda(A)$在$\rho(A)$内是算子值解析函数。

证 (1) 先证$R_\lambda(A)$连续。设$\lambda_0\in\rho(A)$，由(2.6.4)及(2.6.1)，我们有

$$\begin{aligned}\|R_\lambda(A)\|&\leqslant\|R_{\lambda_0}(A)\|\|(I+(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}(A))^{-1}\|\\&\leqslant 2\|R_{\lambda_0}(A)\| \qquad \left(只要|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{2\|R_{\lambda_0}(A)\|}\right).\end{aligned}$$

再按第一预解公式，便得

$$\|R_\lambda(A)-R_{\lambda_0}(A)\|\leqslant|\lambda-\lambda_0|\,\|R_\lambda(A)\|\,\|R_{\lambda_0}(A)\|$$
$$\leqslant 2\|R_{\lambda_0}(A)\|^2|\lambda-\lambda_0|\to 0 \qquad (\lambda\to\lambda_0).$$

(2) 再证可微性。又应用第一预解公式，

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{R_\lambda(A)-R_{\lambda_0}(A)}{\lambda-\lambda_0}=-\lim_{\lambda\to\lambda_0}R_\lambda(A)R_{\lambda_0}(A)=-R_{\lambda_0}(A)^2. \quad \blacksquare$$

现在来证谱点的存在性定理。

定理2.6.10 设A是线性有界算子，则$\sigma(A)\neq\varnothing$。

证 用反证法。倘若$\rho(A)=\mathbf{C}$，那末$R_\lambda(A)$在$\mathbf{C}$上解析，并且由(2.6.2)式，当$|\lambda|>\|A\|$时，有

$$R_\lambda(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{n+1}}A^n, \tag{2.6.6}$$

以及

$$\|R_\lambda(A)\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|-\|A\|}. \tag{2.6.7}$$

因此，$\|R_\lambda(A)\|$在复平面上是有界的。

为了导出矛盾，对$\forall f\in\mathscr{L}(\mathscr{X})^*$，考察(数值)解析函数

$$u_f(\lambda)\triangleq f(R_\lambda(A)).$$

因为它在全平面是有界的解析函数，按Liouville 定理，$u_f(\lambda)$是仅依赖于f的常值函数（与λ无关）。再由Hahn-Banach定理推论 2.4.5，$R_\lambda(A)$是与λ无关的常值算子。依第一预解公式，这显然是不可能的。$\blacksquare$

以下转向估计谱集的范围。

利用等式(2.6.6)以及估计式(2.6.7)可见$\sigma(A)$包含在闭球$\bar{B}(0,\|A\|)$内。再联合推论 2.6.7与定理2.6.10 可见$\sigma(A)$是一个非空紧集。

定义2.6.11 设$A\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$，称数

$$r_\sigma(A)\triangleq\sup\{|\lambda|\,|\,\lambda\in\sigma(A)\}$$

为A的谱半径。

由定义，显然有$r_\sigma(A)\leqslant\|A\|$。我们想得到更精确的估计式。利用等式(2.6.6)以及Cauchy-Hadamard收敛半径公式可见，当

$$|\lambda|>\overline{\lim_{n\to\infty}}\|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

时，$R_\lambda(A)\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$。由此可见

$$r_\sigma(A)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\|A^n\|^{\frac{1}{n}}. \qquad (2.6.8)$$

我们将指出(2.6.8)是$r_\sigma(A)$的最佳估计，记$a\triangleq r_\sigma(A)$。将证：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|A^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant a. \qquad (2.6.9)$$

为此任取$f\in\mathscr{L}(\mathscr{X})^*$，作复函数

$$u_f(\lambda)\triangleq f(R_\lambda(A)).$$

显然$u_f(\lambda)$在$|\lambda|>a$解析。又因为$u_f(\lambda)$有 Laurent 展开式

$$u_f(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{n+1}}f(A^n),$$

利用解析函数 Laurent 展开式与收敛半径的关系，可见$\forall\varepsilon>0$，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a+\varepsilon)^{n+1}}|f(A^n)|<\infty.$$

从而有

$$\left|f\left(\frac{A^n}{(a+\varepsilon)^{n+1}}\right)\right| \qquad (\forall f\in\mathscr{L}(\mathscr{X}^*))$$

有界。应用共鸣定理，有常数$M>0$，使得

$$\frac{1}{(a+\varepsilon)^{n+1}}\|A^n\|\leqslant M.$$

从而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|A^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant a+\varepsilon.$$

再由$\varepsilon>0$的任意性，即得(2.6.9)。联合(2.6.8)与(2.6.9)得

$$r_\sigma(A)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\|A^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{2.6.10}$$

进一步问，(2.6.10)中的上极限符号"$\overline{\lim}$"，能否用极限符号"lim"代替呢？是可以的。事实上，对于$\forall\lambda\in\mathbf{C}$，我们有

$$\lambda^n I-A^n=(\lambda I-A)P_\lambda(A)=P_\lambda(A)(\lambda I-A),$$

其中
$$P_\lambda(A)=\sum_{j=1}^{n}\lambda^{j-1}A^{n-j}.$$

于是从$\lambda^n\in\rho(A^n)$可推出$\lambda\in\rho(A)$。这表明$\forall\lambda\in\sigma(A)$蕴含$\lambda^n\in\sigma(A^n)$。从而有

$$|\lambda^n|\leqslant\|A^n\|,\qquad \text{即得}\quad |\lambda|\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

因此
$$r_\sigma(A)\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\|A^n\|^{\frac{1}{n}}, \tag{2.6.11}$$

联合(2.6.10)与(2.6.11)便知

$$\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

存在，且等于$r_\sigma(A)$。总结起来，有

定理2.6.12(Гельфанд) 设$\mathscr{X}$是B空间，$A\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$，那末

$$r_\sigma(A)=\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

注 定理2.6.11与2.6.12的结论可以推广到一般的Banach代数上去，请参看下册第五章。 ▎

最后，作为一个例子，我们考察谱集。

例2.6.13 在空间l^2上，考察右推移算子

$$A:x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\mapsto(0,x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots).$$

我们将证：

$$\sigma_p(A)=\varnothing;$$
$$\sigma_c(A)=\{\lambda\in\mathbf{C}\mid|\lambda|=1\};$$
$$\sigma_r(A)=\{\lambda\in\mathbf{C}\mid|\lambda|<1\}.$$

证 由于$\|A\|=1$，可见$\sigma(A)$包含在单位圆内。我们分两种情形讨论：

(1) $|\lambda|<1$。将证：$R(\lambda I-A)=\{z\}^{\perp}$，其中$z\triangleq(1,\bar{\lambda},\bar{\lambda}^2,\cdots)$。事实上，若$y=(y_1,y_2,\cdots)\in R(\lambda I-A)$，则$\exists x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2$，使得

$$y_k=\lambda x_k-x_{k-1}\qquad(k=1,2,\cdots),$$

其中$x_0=0$。因此，

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda^{k-1}y_k=\lambda x_1+\lambda(\lambda x_2-x_1)+\cdots+\lambda^{n-1}(\lambda x_n-x_{n-1})$$
$$=\lambda^n x_n\to 0\qquad(n\to\infty).$$

即得 $$(y,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}y_k=0\qquad(\forall y\in R(\lambda I-A)).$$

反之，若$y\perp z$，令$x=(x_1,x_2,\cdots)$，其中

$$x_k=-y_{k+1}-\lambda y_{k+2}-\lambda^2 y_{k+3}-\cdots\qquad(k=1,2,\cdots).$$

当$\lambda=0$时，显然有$x\in l^2$并且$y=(\lambda I-A)x$；当$\lambda\neq0$时，则由

$$|x_k|^2\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda|^j\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda|^j|y_{k+j+1}|^2\qquad(k=1,2,\cdots),$$

我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\leqslant\Big(\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda|^j\Big)^2\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^2,$$

即得$x\in l^2$。又因为$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}y_k=0$，所以

$$x_k=\sum_{j=1}^{k}\lambda^{-j}y_{k-j+1},$$

于是$y_k=\lambda x_k-x_{k-1}(k=1,2,\cdots)$，即得$y=(\lambda I-A)x$。于是我们

有

$$R(\lambda I - A) = \{z\}^{\perp} \qquad (|\lambda| < 1).$$

这蕴含了$\{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| < 1\} \subset \sigma_r(A)$。

(2) $|\lambda| = 1$。先看$\lambda = 1$。因为

$$y = (I - A)x \Longleftrightarrow y_k = x_k - x_{k-1} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$\Longleftrightarrow x_k = \sum_{j=1}^{k} y_j \qquad (k = 1, 2, \cdots),$$

所以

$$R(I - A) = \left\{ y \in l^2 \,\middle|\, \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{k} y_j \right|^2 < \infty \right\}.$$

因此显然有$R(I - A) \neq l^2$。又设$\xi \in l^2$，$\forall \varepsilon > 0$，取正整数N，使得

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \varepsilon^2 / 6.$$

令 $c = \sum_{k=1}^{N} \xi_k$。取$m \in \mathbf{N}$适合$|c|^2/m < \varepsilon^2/6$，以及

$$y_j = \begin{cases} \xi_j & (j \leqslant N), \\ -\dfrac{c}{m} & (N + 1 \leqslant j \leqslant N + m), \\ 0 & (j > N + m), \end{cases}$$

便有 $y = (y_1, y_2, \cdots) \in R(I - A)$，并且$\|\xi - y\| < \varepsilon$。从而有

$$\overline{R(I - A)} = l^2.$$

于是 $1 \in \sigma_c(A)$。

对于适合$|\lambda| = 1$的一般λ，可以化归$\lambda = 1$ 的情形。事实上，

$$y = (\lambda I - A)x \Longleftrightarrow y_k = \lambda x_k - x_{k-1} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$\Longleftrightarrow \lambda^{k-1} y_k = \lambda^k x_k - \lambda^{k-1} x_{k-1} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$\Longleftrightarrow \eta_k = \xi_k - \xi_{k-1} \qquad (k = 1, 2, \cdots),$$

其中 $\xi_k \triangleq \lambda^k x_k$ 以及 $\eta_k \triangleq \lambda^{k-1} y_k (k = 1, 2, \cdots)$。此即化归 $\lambda = 1$ 的情形。于是

$$\{\lambda\in\mathbf{C}\mid|\lambda|=1\}\subset\sigma_c(A).$$

总结起来，我们有$\sigma_p(A)=\varnothing$，$\sigma_c(A)=\{\lambda\in\mathbf{C}\mid|\lambda|=1\}$，以及 $\sigma_r(A)=\{\lambda\in\mathbf{C}\mid|\lambda|<1\}$。 ∎

算子谱论是算子理论的中心内容。在第四、五、六章我们还要再深入讨论它。

习　　题

2.6.1　设$\mathscr{X}$是B空间，求证：$\mathscr{L}(\mathscr{X})$中可逆（有有界逆）算子集是开的。

2.6.2　设A是闭线性算子，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\sigma_p(A)$两两互异，又设$x_i$是对应于$\lambda_i$的本征元($i=1,2,\cdots,n$)。求证：$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是线性无关的。

2.6.3　在双边l^2空间上，考察右推移算子A：

$$x=(\cdots,\xi_{-n},\xi_{-n+1},\cdots,\xi_{-1},\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{n-1},\xi_n,\cdots)\in l^2$$
$$\mapsto Ax=(\cdots,\eta_{-n},\eta_{-n+1},\cdots,\eta_{-1},\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{n-1},\eta_n,\cdots),$$

其中$\eta_m=\xi_{m-1}(m\in\mathbf{Z})$。求证：$\sigma_c(A)=\sigma(A)=$单位圆周。

2.6.4　在l^2空间上，考察左推移算子

$$A:(\xi_1,\xi_2,\cdots)\mapsto(\xi_2,\xi_3,\cdots).$$

求证：$\sigma_p(A)=\{\lambda\in\mathbf{C}\mid|\lambda|<1\}$；　$\sigma_c(A)=\{\lambda\in\mathbf{C}\mid|\lambda|=1\}$，并且$\sigma(A)=\sigma_p(A)\cup\sigma_c(A)$。

2.6.5　在$L^2(-\infty,\infty)$上，考察微分算子

$$A:x(t)\mapsto\frac{dx}{dt},\qquad D(A)=H^1(-\infty,\infty).$$

求证：(1) $\sigma_p(A)=\{\lambda\in\mathbf{C}\mid\mathrm{Re}\lambda<0\}$；

(2) $\sigma_c(A)=\{\lambda\in\mathbf{C}\mid\mathrm{Re}\lambda=0\}$；

(3) $\sigma_r(A)=\varnothing$。

第三章　广义函数与Соболев空间

在五十年代，“广义函数”还是一个有争议的概念，至今已几乎成为任何一个纯粹数学家与应用数学家都具备的常识了。

函数概念是在高等数学一开始就引进的：“如果对于量x的属于μ的一个（数）值，都对应着量y的一个唯一确定的值，我们就说量y是量x确定在集合μ上的一个函数”,然而，这样一个基本的概念，在近代科学技术的发展中逐渐不够用了！我们下面用几个例子来说明：

例3.0.1（脉冲）　本世纪初，工程师Heaviside在解电路方程时，提出了一种运算方法，称之为算子演算(又称运算微积)。这套算法要求对如下的函数（称为Heaviside函数）

$$Y(x)=\begin{cases}1 & (x\geqslant 0),\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

求微商，并把这微商记作$\delta(x)$。但是我们都知道函数$Y(x)$并不可微（事实上它在$x=0$点不连续),因此$\delta(x)$不可能是函数。它除了作为一个记号进行形式演算外，在数学上本来是沒有意义的。可有趣的是：这个$\delta(x)$在实际中却是有意义的。它代表一种理想化了的“瞬时”单位脉冲。图3.0.1表示实际单位脉冲的电流i和时间t的关系图,在$t=0$时接通电源；在$t=t_0$时截断电源，总电量：

$$\int_{-\infty}^{\infty} i(t)\,dt=1.$$

图3.0.2表示理想化了的“瞬时”单位脉冲；所谓“单位”是指：总电量为1；所谓瞬时，是指$t_0\to 0$。这样看来，代表瞬时单位脉

冲的电流的符号 $\delta(t)$，实际上代表一串实际单位脉冲电流函数 $i_n(t)$ 在某种意义下的极限。$\delta(t)$ 本身并不是一个函数。然而在 Heaviside 的算法中，却还要求对 $\delta(t)$ 再求微商和作其它运算。于是问题便产生了：这一切在数学上究竟应当怎样解释呢？特别是它的一些运算法则推导的依据又是什么呢？

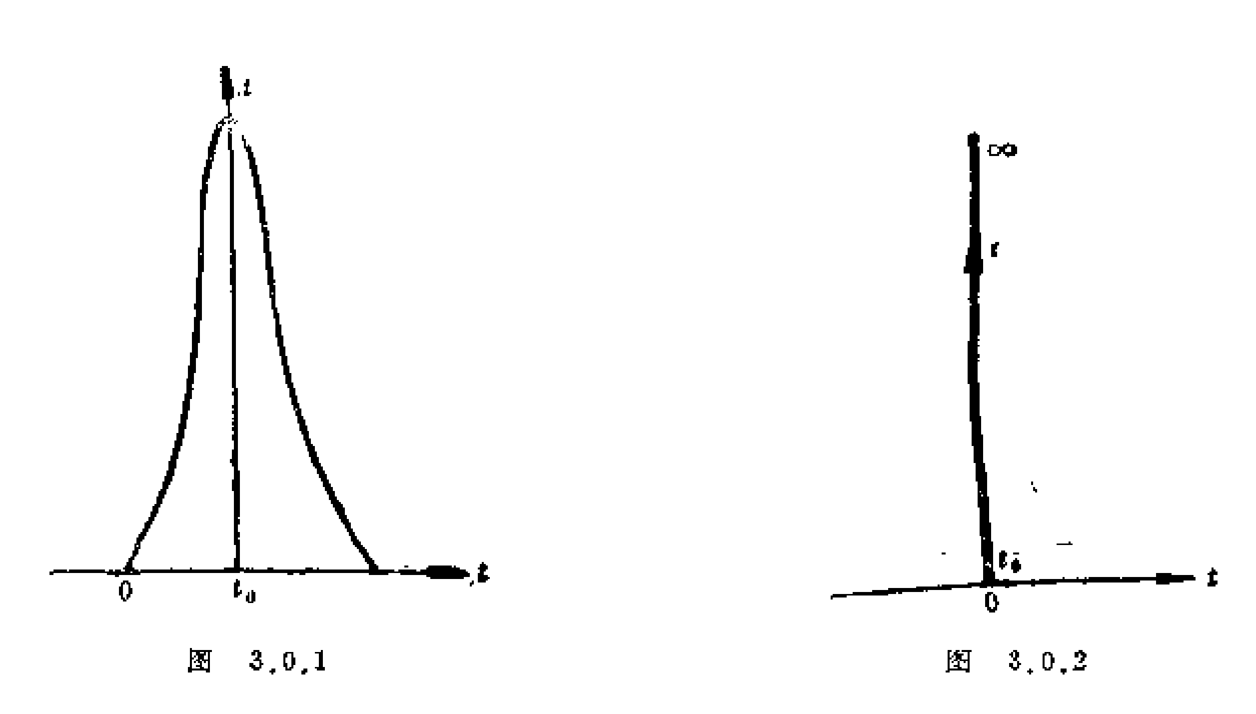


图 3.0.1　　　　图 3.0.2

例3.0.2（Dirac 符号）　在微观世界中，把可观测到的物质的状态用波函数来描述，最简单的波函数具有形式 $e^{i\lambda x}(-\infty<x<\infty)$，$\lambda$ 是实数。通常要考虑如下形式的积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}dx,$$

并把它按下列方式来理解：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} e^{i\lambda x}dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin n\lambda}{\lambda}.$$

我们立刻就会发现：即便如此，极限还是不存在的！但是物理学家们却认为这个极限就是前面所说的瞬时单位脉冲"函数"，记作

$\delta(\lambda)$，并称为 Dirac 符号。在量子力学中，进一步发展了不少关于$\delta(x)$的运算法则，并广泛地使用着。

例3.0.3（广义微商） 在数学本身的发展中，也时常要求冲破古典分析对一些基本运算（如求微商和 Fourier 变换等）使用范围所加的限制。远在三十年代，苏联数学家 С.Л.Соболев 为了确定偏微分方程解的存在性和唯一性，发现如果仅限在古典意义下来理解微商及其所对应的方程，那么一方面会造成很多不必要的限制，另一方面还排斥了很多近代数学工具使用的可能性。因而推广了微商，引进了广义微商的概念，提出了广义函数的思源。Соболев 广义微商的引入，在偏微分方程发展中揭开了新的一页，为泛函分析方法应用到微分方程理论建立了桥梁。

以上几方面都使我们看到：虽然函数概念十分广泛，但是，不论从近代科学技术来看，还是从数学本身要求来看，都已是不敷需要的了。这样一来，自然就有了扩充函数概念的要求。我们也已经看到：问题不仅在于要引进一些理想的函数，更重要的在于要使这些"理想的函数"能够比较自由地进行分析运算。特别是要使"理想的函数"全部在新的意义下可微，微商后还是某个"理想的函数"等等。

首先我们引进一些记号。记多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\geqslant 0$是整数，

$$|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,\qquad \alpha!=\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_n!,$$

$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}\quad(\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n),$$

$$\partial^\alpha=\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n},$$

而且如果 $\beta\leqslant\alpha$（系指 $\beta_j\leqslant\alpha_j$，$j=1,2,\cdots,n$），则

$$\binom{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!}=\binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2}\cdots\binom{\alpha_n}{\beta_n}.$$

§1 广义函数的概念

广义函数是定义在一类“性质很好”的函数空间上的连续线性泛函。为此，先引进这类“性质很好”的函数。

1.1 基本空间 $\mathscr{D}(\Omega)$

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个开集，$u\in C(\bar{\Omega})$，称集合

$$F=\{x\in\Omega\,|\,u(x)\neq 0\}$$

的闭包(关于 Ω)为 u 的关于 Ω 的支集，记作 $\mathrm{supp}\,u$。换句话说，连续函数 u 的支集是在此集外 u 恒为 0 的相对于 Ω 的最小闭集。

对于整数 $k\geqslant 0$(可以是 ∞)，$C_0^k(\Omega)$ 表记支集在 Ω 内紧的全体 $C^k(\bar{\Omega})$ 函数所组成的集合，于是

$$C_0^\infty(\Omega)\subset\cdots\subset C_0^{k+1}(\Omega)\subset C_0^k(\Omega)\subset\cdots\subset C_0^0(\Omega).$$

下例表明 $C_0^\infty(\Omega)$ 是非空的。

例3.1.1 设

$$j(x)\triangleq\begin{cases}C_n e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & (|x|<1),\\ 0 & (|x|\geqslant 1),\end{cases}\tag{3.1.1}$$

其中

$$C_n\triangleq\left(\int_{|x|<1}e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}dx\right)^{-1}$$

是一个仅依赖于维数的常数，那末 $j(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，并且

$$\int_{\mathbb{R}^n}j(x)dx=1. \quad \blacksquare$$

从它出发，可以得到许多 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的函数，$\forall\,\delta>0$，令

$$j_\delta(x)\triangleq\frac{1}{\delta^n}j\left(\frac{x}{\delta}\right).\tag{3.1.2}$$

我们有

命题3.1.2 设 $u(x)$ 是一个可积函数，并在 Ω 的一个紧子集 K 外恒为 0，则当 $\delta>0$ 足够小时函数

$$u_\delta(x)\triangleq\int_\Omega u(y)j_\delta(x-y)dy\tag{3.1.3}$$

是 $C_0^\infty(\Omega)$的函数。

证 记 $K_\delta \triangleq \{x \in \mathbf{R}^n \mid \operatorname{dist}(x, K) \leqslant \delta\}$，便有当 δ 足够小时，$K_\delta \subset \Omega$ 且 $u_\delta(x) = 0 (x \overline{\in} K_\delta)$（见图3.1.1）；而

$$\partial^\alpha u_\delta(x) = \int_\Omega u(y) \partial^\alpha j_\delta(x-y) dy \qquad (\forall x \in K_\delta). \quad (3.1.4)$$

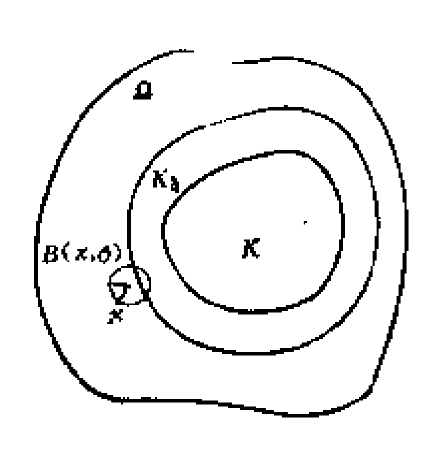


图 3.11

这是因为，例如说对指标 $\alpha_0 = (1, 0, \cdots, 0)$，

$$\partial^{\alpha_0} u_\delta(x) = \lim_{h \to 0} \int_\Omega \frac{1}{h} [j_\delta(x + he_1 - y) - j_\delta(x - y)] u(y) dy$$

$$= \lim_{h \to 0} \int_\Omega \partial^{\alpha_0} j_\delta(x + \theta h e_1 - y) u(y) dy,$$

其中 $\theta = \theta(x, y) \in (0, 1)$，$e_1 = (1, 0, \cdots, 0) \in \mathbf{R}^n$，利用 j_δ 的连续可微性，∃常数 M_{α_0}，使得

$$|\partial^{\alpha_0} j_\delta(z)| \leqslant M_{\alpha_0} \qquad (\forall z \in \mathbf{R}^n).$$

再应用 Lebesgue 控制收敛定理，即得

$$\partial^{\alpha_0} u_\delta(x) = \int_\Omega \lim_{h \to 0} \partial^{\alpha_0} j_\delta(x + \theta h e_1 - y) u(y) dy$$

$$= \int_\Omega \partial^{\alpha_0} j_\delta(x - y) u(y) dy.$$

逐次应用上述步骤，得任意指标 α 的等式(3.1.4)。

定理3.1.3 若 $u\in C_0^k(\Omega)$，则

$$\|u_\delta(x)-u(x)\|_{C^k(\bar\Omega)}\to 0 \qquad (\delta\to 0).$$

证 把 $u(x)$ 定义延拓到全空间 $\mathbf{R}^n$，在 Ω 外补充为 0，对 $\forall$ 指标 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，当 $|\alpha|\leqslant k$ 时，我们有

$$\partial^\alpha u_\delta(x)=\int_{\mathbf{R}^n}u(y)\partial_x^\alpha j_\delta(x-y)dy$$

$$=(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbf{R}^n}u(y)\partial_y^\alpha j_\delta(x-y)dy$$

$$=\int_{\mathbf{R}^n}\partial_y^\alpha u(y)j_\delta(x-y)dy$$

$$=\int_{\mathbf{R}^n}\partial_y^\alpha u(x-\delta y)j(y)dy,$$

从而

$$|\partial^\alpha u_\delta(x)-\partial^\alpha u(x)|\leqslant\int_{\mathbf{R}^n}|\partial^\alpha u(x-\delta y)-\partial^\alpha u(x)|j(y)dy.$$

注意到 $j(y)=0(|y|\geqslant 1)$，而 $\partial^\alpha u(z)$ 在

$$(\mathrm{supp}u)_1\triangleq\{x\in\mathbf{R}^n|\mathrm{dist}(x,\mathrm{supp}u)\leqslant 1\}$$

上一致连续。$\forall\varepsilon>0$，$\exists 0<\delta_0<1/2$，当 $0<\delta<\delta_0$ 时，

$$|\partial^\alpha u(x-\delta y)-\partial^\alpha u(x)|<\varepsilon \quad (\forall x\in\mathbf{R}^n,|y|\leqslant 1);$$

所以有

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|\partial^\alpha u_\delta(x)-\partial^\alpha u(x)|<\varepsilon\int_{\mathbf{R}^n}j(y)dy=\varepsilon.$$

推论3.1.4 若 μ 是 Ω 上的一个完全可加测度，由

$$\int_\Omega\varphi d\mu=0 \qquad (\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)),$$

便能推出

$$\int_\Omega\varphi d\mu=0 \qquad (\forall\varphi\in C_0^0(\Omega)).$$

证明从略，留作习题。

定义3.1.5 在集合 $C_0^\infty(\Omega)$ 上定义收敛性如下：我们说序列

$\{\varphi_j\}$收敛于 φ_0，如果

(1) 存在一个相对于 Ω 的紧集 $K\subset\Omega$，使得 $\mathrm{supp}(\varphi_j)\subset K$ $(j=0,1,2,\cdots)$；

(2) 对于任意指标 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 都有

$$\max_{x\in K}|\partial^\alpha\varphi_j(x)-\partial^\alpha\varphi_0(x)|\to 0 \qquad (j\to\infty).$$

带上述收敛性的线性空间 $C_0^\infty(\Omega)$，称为基本空间$\mathscr{D}(\Omega)$。

注 我们只在$\mathscr{D}(\Omega)$上引进了收敛性，并没给定拓扑，而上述收敛性，并不能由任何模，甚至准模所导出。$\mathscr{D}(\Omega)$ 不是 B^* 空间！

命题3.1.6 $\mathscr{D}(\Omega)$是序列完备的，即，若$\{\varphi_j\}_0^\infty$ 是一个基本列，它适合

(1) $\exists$ 公共紧支集K，使 $\mathrm{supp}\varphi_j\subset K$；

(2) $\forall\,\varepsilon>0$，$\forall\,\alpha$，$\exists\, N=N(\varepsilon,\alpha)\in\mathbf{N}$，使得

$$\max_{x\in K}|\partial^\alpha\varphi_n(x)-\partial^\alpha\varphi_m(x)|<\varepsilon \quad (\text{当} m,n>N),$$

则必有 $\varphi_0\in\mathscr{D}(\Omega)$，使得 $\varphi_j\to\varphi_0(j\to\infty)$。

证明从略。留作习题。

1.2 *广义函数的定义和基本性质*

定义3.1.7 $\mathscr{D}(\Omega)$上的一切线性连续泛函都称为广义函数，即广义函数是这样的泛函 f：$\mathscr{D}(\Omega)\to\mathbf{R}^1$，满足

(1) 线性：

$$\langle f,\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2\rangle=\lambda_1\langle f,\varphi_1\rangle+\lambda_2\langle f,\varphi_2\rangle$$
$$(\forall\,\varphi_1,\varphi_2\in\mathscr{D}(\Omega),\ \forall\,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}^1);$$

(2) 对于任意的$\{\varphi_j\}\subset\mathscr{D}(\Omega)$，只要 $\varphi_j\to\varphi_0(\mathscr{D}(\Omega))$，都有

$$\langle f,\varphi_j\rangle\to\langle f,\varphi_0\rangle \qquad (j\to\infty).$$

一切广义函数所组成的集合记作$\mathscr{D}'(\Omega)$。

例3.1.8 δ-函数。设 $\theta\in\Omega$，定义

$$\langle\delta,\varphi\rangle=\varphi(\theta) \qquad (\forall\,\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)).$$

显然 δ 是线性的，而且当 $\varphi_j\to\varphi_0(\mathscr{D})$时，我们有

$$|\varphi_j(\theta)-\varphi_0(\theta)|\to 0 \qquad (j\to\infty).$$

从而 $$\langle\delta,\phi_j\rangle=\varphi_j(\theta)\to\varphi_0(\theta)=\langle\delta,\varphi_0\rangle \quad (j\to\infty),$$

即 δ 在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 上是连续的，所以 δ 是一个广义函数。

例3.1.9 对任意多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，定义

$$\langle\delta^{(\alpha)},\varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha\varphi)(\theta) \quad (\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)),$$

则 $\delta^{(\alpha)}$ 也是一个广义函数。

例3.1.10 设 $f(x)$ 是 Ω 上的一个局部可积函数，即对于任意相对于Ω的紧集K，积分

$$\int_K|f(x)|dx<\infty,$$

记作 $f(x)\in L^1_{loc}(\Omega)$，那末 $f(x)$ 对应着一个广义函数

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \quad (\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)). \qquad (3.1.5)$$

证 线性条件显然，再验证连续性：若 $\varphi_j\to\varphi_0(\mathscr{D}(\Omega))$，则存在紧集 $K\subset\Omega$，使得

$$\operatorname{supp}\varphi_j\subset K, \text{ 且 } \max_{x\in K}|\varphi_j(x)-\varphi_0(x)|\to 0 \quad (j\to\infty).$$

从而由 Lebesgue 控制收敛定理，便有

$$|\langle f,\varphi_j\rangle-\langle f,\varphi_0\rangle|$$
$$\leqslant\int_K|f(x)||\varphi_j(x)-\varphi_0(x)|dx\to 0 \quad (j\to\infty).$$

注 1 若把几乎处处相等的局部可积函数不加区别，则

$$f(x)\to f(L^1_{loc}(\Omega)\to\mathscr{D}'(\Omega))$$

的对应是1-1的。事实上，要证：若 $f\in L^1_{loc}(\Omega)$，且

$$\int_\Omega f\varphi dx=0 \qquad (\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)),$$

则 $f(x)=0$(p.p. 于Ω)。这只要证 $\forall$ 球 $B(x_0,\delta)\subset\Omega$，都有 $f(x)=0$(p.p. 于 $B(x_0,\delta)$)。为此考察函数

$$\tilde{f}(x)\triangleq\begin{cases}\operatorname{sign}f(x) & (x\in B(x_0,\delta)),\\ 0 & (x\notin B(x_0,\delta)),\end{cases}$$

显然有$\tilde{f}\in L^1(\Omega)$,并且在Ω的一个紧集$B(x_0,\delta)$外为0。应用习题3.1.1，$C_0^\infty(\Omega)$函数可以任意逼近这个函数，即函数

$$\tilde{f}_\delta(x)\triangleq\int_\Omega\tilde{f}(y)j_\delta(x-y)dy,$$

当$\delta>0$足够小时，有

$$\|\tilde{f}_\delta-\tilde{f}\|_{L^1(\Omega)}\to 0\qquad(\delta\to 0),$$

且$\tilde{f}_\delta\in\mathscr{D}(\Omega)$。从而由Riesz定理和Lebesgue控制收敛定理，我们有

$$\int_{B(x_0,\delta)}|f(x)|dx=\int_\Omega f(x)\tilde{f}(x)dx$$

$$=\lim_{\delta_i\to 0}\int_\Omega f(x)\tilde{f}_{\delta_i}(x)dx=0,$$

其中$\{\delta_i\}$是使得$\tilde{f}_{\delta_i}\to\tilde{f}$(p.p.于$\Omega$)的正数列。即得

$$f(x)=0\qquad(\text{p.p.于}\ B(x_0,\delta)).$$

注2 并不是所有的函数都是广义函数。事实上，普通的不可测的函数并不能看成是广义函数。确切地说，广义函数只是局部可积函数的推广。每一个局部可积函数按(3.1.5)对应一个广义函数，在这个意义上，我们说每个局部可积函数都是一个广义函数。今后，凡将一局部可积函数看成广义函数时，都按这种方式定义。值得注意的是这种对应并非在上的，也就是说$\mathscr{D}'(\Omega)$含有比$L^1_{loc}(\Omega)$更多的元素(见习题3.1.2)。也正因为如此，我们才把$\mathscr{D}'(\Omega)$中的元素称为广义函数。

例3.1.11 若μ是Ω上的一个完全可加测度，则

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_\Omega\varphi(x)d\mu(x)\qquad(\forall\,\varphi\in\mathscr{D}(\Omega))$$

也定义了一个广义函数，这对应同样是1-1的(推论3.1.4)。

例3.1.12 若$\Omega=(0,1)$，则

$$\langle f,\varphi\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}\varphi^{(j)}\left(\frac{1}{j}\right)\qquad(\forall\,\varphi\in\mathscr{D}(\Omega))$$

也是一个广义函数。

定理3.1.13 为了 $f\in\mathscr{D}'(\Omega)$，必须且仅须对任意相对于 Ω 的紧集 K，存在着常数 C 及非负整数 m，使得

$$|\langle f,\varphi\rangle|\leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant m}\sup_{x\in K}|\partial^\alpha\varphi(x)|\quad(\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega),\operatorname{supp}\varphi\subset K).\tag{3.1.6}$$

证 充分性是显然的，下证必要性。用反证法。倘若不然，有紧集 K，使得(3.1.6)不成立。因为(3.1.6)对 φ 是齐次的，所以对 $\forall j\in\mathbf{N}$，$\exists\varphi_j\in\mathscr{D}(\Omega)$，使得 $\operatorname{supp}\varphi_j\subset K$，并满足：

$$\sup_{x\in K}|\partial^\alpha\varphi_j|\leqslant\frac{1}{j}\qquad(|\alpha|\leqslant j),$$

以及 $\langle f,\varphi_j\rangle=1$。因此，$\{\varphi_j\}$ 在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 中收敛于0，从而

$$\langle f,\varphi_j\rangle\to 0\qquad(j\to\infty).$$

这显然是不可能的。

1.3 广义函数的收敛性

在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 上可以规定加法与数乘：

$$\langle(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2),\varphi\rangle=\lambda_1\langle f_1,\varphi\rangle+\lambda_2\langle f_2,\varphi\rangle$$
$$(\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega),\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}^1),$$

从而 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 构成一个线性空间。现在在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 上引入＊弱收敛。

定义3.1.14 称 $\{f_j\}\subset\mathscr{D}'(\Omega)$ 收敛到 $f_0\in\mathscr{D}'(\Omega)$，是指：

$$\langle f_j,\varphi\rangle\to\langle f_0,\varphi\rangle\qquad(\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)).$$

在此我们强调一下：广义函数意义下的收敛是十分弱的收敛。举几个例子看，

例3.1.15 在 $\mathbf{R}^1$ 上，

$$f_j(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin jx}{x}\qquad(j=1,2,\cdots)$$

是一串 $L^1_{loc}(\mathbf{R}^1)$ 函数，从而可以看成是广义函数列。我们有 $f_j\to\delta(\mathscr{D}'(\Omega))$。

证 因为有

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin jx}{x}dx=1,$$

所以$\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathrm{R}^1)$,存在$T_0>0$,使得$\mathrm{supp}\varphi\subset[-T_0,T_0]$.一方面,当$T>T_0$时,

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_j(x)\cdot\varphi(x)dx=\int_{-T}^{T}f_j(x)\varphi(x)dx;$$

另一方面,$\forall\varepsilon>0$,取T_1足够大,以致$T>T_1$时,

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin jx}{x}dx-1\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

从而当$T>\max\{T_0,T_1\}$时,

$$|\langle f_j,\varphi\rangle-\varphi(0)|\leqslant\left|\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin jx}{x}[\varphi(x)-\varphi(0)]dx\right|+\frac{\varepsilon}{2}|\varphi(0)|$$

$$=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^T\sin jx\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x}dx\right|+\frac{\varepsilon}{2}|\varphi(0)|.$$

固定T,由Riemann-Lebesgue定理,存在正整数n_0,当$j>n_0$时,

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^T\sin jx\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x}dx\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是得$\langle f_j,\varphi\rangle\to\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle(\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathrm{R}^1))$.

例3.1.16 设$j_\delta(x)$为例3.1.1中定义的函数,$\delta>0$,则当$\delta\to0$时,j_δ作为广义函数列收敛到$\delta(x)(\mathscr{D}'(\mathrm{R}^n))$.又若用$\delta_{x_0}$表示广义函数:

$$\langle\delta_{x_0},\varphi\rangle=\varphi(x_0)\qquad(\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathrm{R}^n)),$$

则$j_\delta(x-x_0)\to\delta_{x_0}$.

证 直接利用定理3.1.3.

例3.1.17 设$f_j(x)$是Ω上的一串局部可积函数列,并且对任意相对于Ω的紧集K,存在常数M_k,使得

$$|f_j(x)|\leqslant M_k \qquad (\forall x\in K,\ j=0,1,2,\cdots),$$
并且 $f_j(x)\to f_0(x)\,(j\to\infty)$ (p.p. $x\in\Omega$)；则作为广义函数列 f_j，

$$\langle f_j,\varphi\rangle=\int_\Omega f_j(x)\varphi(x)dx \quad (j=0,1,2,\cdots),$$

在广义函数意义下收敛到 f_0。

证 由 Lebesgue 控制收敛定理直接得到。

例3.1.18 设 $f_1(x)=e^{-\pi|x|^2}$，令

$$f_j(x)=j^{\frac{n}{2}}f_1(\sqrt{j}\,x)=j^{\frac{n}{2}}e^{-j\pi|x|^2} \quad (j=2,3,\cdots);$$

则有

$$\langle f_j,\varphi\rangle\to\langle\delta,\varphi\rangle \qquad (\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)),$$

其中 f_j 是函数 $f_j(x)$ 所对应的广义函数 $(j=1,2,3,\cdots)$。

证明留作习题。

习　题

3.1.1 设 $1\leqslant p<\infty$，求证：$C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密。

提示 (1) 若 $u\in L^p(\Omega)\,(1<p<\infty)$，$u_\delta(x)$ 是按(3.1.3)构造的函数，则按 Young 不等式(见引理2.5.13)，便有

$$\|u_\delta\|_p\leqslant\|u\|_p.$$

(2) 用 Лузин 定理证明 $C_0^0(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密。

(3) 用典型的 $\varepsilon/3$ 论证法。从 $u\in L^p(\Omega)$ 出发，为了找到 $u_\delta\in C_0^\infty(\Omega)$，使得它逼近 u 的误差

$$\|u_\delta-u\|_p<\varepsilon,$$

我们可以分三个步骤进行，每步引进的误差各小于 $\varepsilon/3$。

第一步。找 $\varphi\in C_0^0(\Omega)$，使得 $\|u-\varphi\|_p<\varepsilon/3$；

第二步。找 $\varphi_\delta\in C_0^\infty(\Omega)$，使得 $\|\varphi-\varphi_\delta\|_p<\varepsilon/3$；

第三步。找 $u_\delta\in C_0^\infty(\Omega)$，使得 $\|\varphi_\delta-u_\delta\|_p<\varepsilon/3$。

3.1.2 求证：δ 函数不是局部可积函数。

3.1.3 设

$$f_j(x)=\left(1+\frac{x}{j}\right)^j \qquad (j=1,2,\cdots),$$

求证： $$f_j(x)\to e^x \qquad (\mathscr{D}'(\mathbb{R}^1)).$$

3.1.4 在 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^1)$ 中，求证：

(1) $\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2+\varepsilon^2}\to\delta(x)\ (\varepsilon\to 0+)$；

(2) $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\to\delta(x)\ (t\to 0+)$.

3.1.5 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个开集，又设 K 是 Ω 的一个紧子集，求证：存在一个函数 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，使得 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$，且 $\varphi(x)$ 在 K 的一个邻域内恒为 1.

§2 B_0 空间

我们来仔细分析 $\mathscr{D}(\Omega)$ 的收敛性，同时也研究一些其它有关的空间。设 K 是相对于 Ω 的紧集，又设 $C^\infty(\Omega)$ 表示 Ω 上的无穷次可微函数全体，我们引入

$$\mathscr{D}_K=\{\varphi\in C^\infty(\Omega)\,|\,\mathrm{supp}\varphi\subset K\},$$

其收敛性规定如下：$\varphi_j\to\varphi_0$，是指对任意的多重指标 α，

$$\max_{x\in K}|\partial^\alpha(\varphi_j-\varphi_0)(x)|\to 0 \qquad (j\to\infty).$$

我们当然想用模来刻划这种收敛性，但是无论如何这种收敛性不能用一个模来描写。事实上，可以引入可数个模：

$$\|\varphi\|_m=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\max_{x\in K}|\partial^\alpha\varphi(x)| \qquad (m=1,2,\cdots). \quad (3.2.1)$$

$\mathscr{D}_K$ 上的收敛性是由这可数多个模 $\{\|\varphi\|_m\}$ 描写的：为了 $\varphi_j\to\theta$ $(\mathscr{D}_K)$，必须而且仅须对 $\forall m\in\mathbb{N}$，有

$$\|\varphi_j\|_m\to 0 \qquad (j\to\infty).$$

即 $\forall\varepsilon>0$，$\forall m\in\mathbb{N}$，$\exists N=N(\varepsilon,m)$，使得 $\|\varphi_j\|_m<\varepsilon\ (j>N)$.

于是引向

定义3.2.1 设$\mathscr{X}$是一个线性空间，称它是可数模空间(或B_0^*空间)，是指在它上面有可数个半模$\{\|\cdot\|_m\}_1^\infty$，满足：

(1) $\|x+y\|_m\leqslant\|x\|_m+\|y\|_m$；

(2) $\|\lambda x\|_m=|\lambda|\|x\|_m$；

(3) $\|x\|_m\geqslant 0,\|\theta\|_m=0$；

(4) $\|x\|_m=0(m=1,2,\cdots)\Longleftrightarrow x=\theta$。

注1 实际上每个$\|\cdot\|_m$是半模。

注2 在可数模空间定义中，可数个半模可以换成满足下列条件的可数个半模：

$$\|x\|_1'\leqslant\|x\|_2'\leqslant\cdots\leqslant\|x\|_m'\leqslant\cdots\quad(\forall x\in\mathscr{X}).$$

事实上，只须令

$$\|x\|_m'=\max(\|x\|_1,\cdots,\|x\|_m)\quad(\forall x\in\mathscr{X}).$$

定义3.2.2 在线性空间$\mathscr{X}$上给定两组可数个半模

$$\{\|\cdot\|_m\}_1^\infty\quad 与\quad\{\|\cdot\|_n'\}_1^\infty,$$

称它们是等价的，如果它们导出相同的收敛性。

命题3.2.3 在线性空间$\mathscr{X}$上，为了两组可数个半模

$$\{\|\cdot\|_m\}_1^\infty\quad 与\quad\{\|\cdot\|_n'\}_1^\infty$$

是等价的，必须且仅须：$\forall m\in\mathbf{N}$，$\exists m'\in\mathbf{N}$及$\exists C_{mm'}>0$，使得

$$\|x\|_m\leqslant C_{mm'}\|x\|'_{m'}\qquad(\forall x\in\mathscr{X}),$$

并且$\forall n'\in\mathbf{N}$，$\exists n\in\mathbf{N}$及$\exists C'_{n'n}>0$，使得

$$\|x\|'_{n'}\leqslant C'_{n'n}\|x\|_n\qquad(\forall x\in\mathscr{X}).$$

证明留作习题。

命题3.2.4 每个B_0^*空间$\mathscr{X}$必是一个F^*空间，即若$\{\|\cdot\|_m\}_1^\infty$是可数个半模，则

$$\|x\|=\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{2^m}\frac{\|x\|_m}{1+\|x\|_m}\qquad(\forall x\in\mathscr{X})$$

是一个准模，并且$\|\cdot\|$导出的收敛性与$\{\|\cdot\|_m\}_1^\infty$导出的收敛性一致。

证明留作习题(参照s空间的收敛性，见例1.4.7)。

以下举一些B_0^*空间的例子。

例3.2.5 $\mathscr{D}_K$ 是 B_0^* 空间，其可数模$\|\cdot\|_m$按(3.2.1)规定.

例3.2.6 $\mathscr{E}(\Omega)$。设Ω是$\mathbb{R}^n$中的任意开集，又设K_m是一串相对于Ω的紧集，适合

$$K_1\subset K_2\subset\cdots\subset K_m\subset\cdots\subset\Omega,\quad \bigcup_{m=1}^{\infty}K_m=\Omega;$$

并令

$$\|\varphi\|_m=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\max_{x\in K_m}|\partial^\alpha\varphi(x)|\quad(m=1,2,\cdots).$$

用$\mathscr{E}(\Omega)$表记带有可数模$\{\|\varphi\|_m\}_1^\infty$的线性空间$C^\infty(\Omega)$，则$\mathscr{E}(\Omega)$是一个$B_0^*$空间(易证)。按定义，为了$\varphi_j\to 0(\mathscr{E}(\Omega))$，必须且仅须$\forall\varepsilon>0$，$\forall m\in\mathbf{N}$，$\exists N=N(\varepsilon,m)$，使得

$$\max_{x\in K_m}|\partial^\alpha\varphi_j(x)|<\varepsilon\quad(\forall|\alpha|\leqslant m,\forall j>N);$$

或者说，在每一个相对于Ω的紧集K_m上，直到m次导数一致收敛于0。

注 $\mathscr{E}(\Omega)$上的收敛性与紧集列$\{K_m\}$的选择无关.即,按不同的紧集列定义出的两组可数个半模是等价的。其证明留作习题。

例3.2.7 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$。用$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$表记集合

$$\{\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)\,|\sup|(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}\partial^\alpha\varphi(x)|$$
$$\leqslant M_{k,\alpha}<\infty\quad(k,|\alpha|=0,1,2,\cdots)\}.$$

定义半模为

$$\|\varphi\|_m=\sup_{\substack{|\alpha|\leqslant m\\ x\in\mathbb{R}^n}}|(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}}\partial^\alpha\varphi(x)|\quad(m=0,1,2,\cdots).$$

$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$上的函数称为速降函数，其任意阶导数在无穷远处比任何负幂次下降得都快。确切地说，对任意非负整数m及多重指标α，都有

$$\lim_{|x|\to\infty}(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}}|\partial^\alpha\varphi(x)|=0.$$

定义3.2.8(完备性) 一个 B_0^* 空间 $\mathscr{X}$ 称为是完备的，是指其中的任何基本列都是收敛的。完备的 B_0^* 空间称为 B_0 空间。

例3.2.9 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 是 B_0 空间。

证 设 $\{\varphi_\nu(x)\}$ 是 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 中的一个基本列。由定义，对 $\forall m\in\mathbf{N}$ 及 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=N(m,\varepsilon)$，当 $\mu,\nu>N$ 时，

$$\sup_{\substack{|\alpha|\leqslant m\\ x\in\mathbf{R}^n}}(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}}|\partial^\alpha[\varphi_\mu-\varphi_\nu](x)|<\varepsilon \qquad (3.2.2)$$

(1) 因为每个 m，$\{\|\varphi_\nu\|_m\}$ 是有界的，故必存在常数 M_m，使得

$$\sup_{\substack{|\alpha|\leqslant m\\ x\in\mathbf{R}^n}}(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}}|\partial^\alpha\varphi_\nu(x)|\leqslant M_m \quad (\nu=1,2,\cdots),$$

从而

$$|\partial^\alpha\varphi_\nu(x)|\leqslant\frac{M_m}{(1+|x|^2)^{m/2}}; \qquad (3.2.3)$$

此外，在任意有界闭球 $|x|\leqslant R$ 上，$\{\partial^\alpha\varphi_\nu(x)\}$ 依一致模是基本序列。所以在 $|x|\leqslant R$ 上，它有一个一致极限 $\psi_\alpha(x)$，

$$|\psi_\alpha(x)|\leqslant\frac{M_m}{(1+|x|^2)^{m/2}} \quad (|\alpha|\leqslant m). \qquad (3.2.4)$$

(2) $\psi_\alpha(x)=\partial^\alpha\psi_0(x)$。其实我们只要证明

$$\psi_{(1,0,\cdots,0)}(x)=\partial_{x_1}\psi_0(x)$$

就够了，因为其余部分用归纳法递推即可。事实上，对任意的 $R>0$，当 $|x|\leqslant R$ 时，我们有

$$\partial_{x_1}\varphi_\nu(x)\rightrightarrows\psi_{(1,0,\cdots,0)}(x) \qquad (\nu\to\infty),$$

以及

$$\varphi_\nu(x)\rightrightarrows\psi_0(x) \qquad (\nu\to\infty).$$

对 $\forall\ \varepsilon>0$，取 $M_1'>0$，及 $N_0\in\mathbf{N}$，使得

$$\int_{|x_1|>M_1'}\frac{dx_1}{(1+|x_1|^2)^{1/2}}<\frac{\varepsilon}{4M_1},$$

以及

$$|\psi_{(1,0,\cdots,0)}(x)-\partial_{x_1}\varphi_\nu(x)|<\frac{\varepsilon}{4M_1'}\quad(|x|\leqslant M_1',\nu>N_0);$$

便有

$$\left|\int_{-\infty}^{x_1}\psi_{(1,0,\cdots,0)}(x',x_2,\cdots,x_n)dx'-\varphi_\nu(x_1,x_2,\cdots,x_n)\right|$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{x_1}[\psi_{(1,0,\cdots,0)}(x',\cdot)-\partial_{x_1}\varphi_\nu(x',\cdot)]dx'\right|$$

$$\leqslant\int_{|x'|>M_1'}|\psi_{(1,0,\cdots,0)}(x',\cdot)|dx'+\int_{|x'|>M_1'}|\partial_{x_1}\varphi_\nu(x',\cdot)|dx'$$

$$+\int_{|x'|\leqslant M_1'}|\psi_{(1,0,\cdots,0)}(x',\cdot)-\partial_{x_1}\varphi_\nu(x',\cdot)|dx'$$

$$<2M_1\cdot\frac{\varepsilon}{4M_1}+2M_1'\cdot\frac{\varepsilon}{4M_1'}=\varepsilon.$$

从而
$$\psi_0(x)=\int_{-\infty}^{x_1}\psi_{(1,0,\cdots,0)}(x',\cdot)dx',$$

即
$$\psi_{(1,0,\cdots,0)}(x)=\partial_{x_1}\psi_0(x).$$

这也同时证明了 $\psi_0(x)\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$。

(3) $\|\varphi_\nu-\psi_0\|_m\to0$ $(\nu\to\infty)$。事实上，对 $\forall\varepsilon>0,\exists R>0$，使得当 $|x|>R$ 时，

$$\sup_{|\alpha|\leqslant m}|\partial^\alpha[\varphi_\nu(x)-\psi_0(x)]|\leqslant\frac{M_m}{(1+|x|^2)^{m/2}}<\varepsilon.$$

再确定 N，使得当 $\nu>N$ 时，在 $|x|\leqslant R$ 上有

$$\sup_{|\alpha|\leqslant m}|\partial^\alpha[\varphi_\nu(x)-\psi_0(x)]|<\varepsilon.$$

从而
$$\partial^\alpha\varphi_\nu(x)\rightrightarrows\partial^\alpha\psi_0(x)\quad(\nu\to\infty,\forall x\in\mathbb{R}^n).$$

因此，在(3.2.2)中令 $\mu\to\infty$ 即得

$$\|\varphi_\nu-\psi_0\|\leqslant\varepsilon\qquad(\forall\nu>N).$$

于是空间 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 是完备的。∎

注意：$\mathscr{D}(\Omega)$ 不是 B_0^* 空间。但是关于 $\mathscr{D}(\Omega)$ 的收敛性我们有：

命题3.2.10 为了 $\varphi_\nu\to\varphi_0(\mathscr{D}(\Omega))$，必须且仅须存在紧集 $K\subset\Omega$，使得 $\varphi_0,\varphi_\nu\subset\mathscr{D}_K$，而且

$$\|\varphi_\nu-\varphi_0\|_{m,k}\to 0\quad(\nu\to\infty,m=1,2,\cdots),$$

其中 $\|\varphi\|_{m,k}$ 是 $\mathscr{D}_k$ 上的可数模。

证明留作习题。

正如在§1中见到的那样，$\mathscr{D}'(\Omega)$ 表示广义函数全体，它是 $\mathscr{D}(\Omega)$ 的共轭空间。对于 $\mathscr{D}_K(\Omega),\mathscr{E}(\Omega),\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 我们也要考虑相应的共轭空间，分别记作 $\mathscr{D}'_K(\Omega),\mathscr{E}'(\Omega),\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$。当 $\Omega=\mathbf{R}^n$ 时，简单地记作 $\mathscr{D}'_K,\mathscr{E}',\mathscr{S}'$。显然有

$$\mathscr{E}'\subset\mathscr{S}'\subset\mathscr{D}'.$$

首先，我们要讨论这些空间有足够多元素，然后设法把它们表示出来。为此，我们把 B 空间上线性泛函的连续性与有界性的关系(定理2.1.11)推广到 B_0 空间。

引理3.2.11 设 $\mathscr{X}$ 是一个 B_0 空间。为了 $\mathscr{X}$ 上的线性泛函 f 是连续的，必须且仅须 $\exists m\in\mathbf{N}$ 及 $M_m>0$，使得

$$|f\langle,\varphi\rangle|\leqslant M_m\|\varphi\|_m\qquad(\forall\varphi\in\mathscr{X}).$$

证 充分性显然。必要性用反证法。倘若不然，对 $\forall n\in\mathbf{N}$，$\exists x_n\in\mathscr{X}$，使得

$$|\langle f,x_n\rangle|>n\|x_n\|_n.\tag{3.2.5}$$

(1) 如果 $\exists N\in\mathbf{N}$，使得 $\|x_n\|_n\neq 0(\forall n\geqslant N)$，令

$$y_n\triangleq\frac{x_n}{n\|x_n\|_n}\qquad(n\geqslant N),$$

那末

$$\|y_n\|_p=\frac{\|x_n\|_p}{n\|x_n\|_n}\leqslant\frac{1}{n}\quad(\text{当 }n\geqslant\max(N,p)).$$

故 $y_n\to\theta(n\to\infty)$。但 $|\langle f,y_n\rangle|>1(n\geqslant N)$，这与 f 的连续性矛盾。

(2) 如果存在 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$，使得 $\|x_{n_i}\|_{n_i}=0(i=1,2,\cdots)$，那末有 $|\langle f,x_{n_i}\rangle|>0$，令

$$y_{n_i}=\frac{x_{n_i}}{\langle f,x_{n_i}\rangle}\qquad(i=1,2,\cdots),$$

便有$\langle f,y_{n_i}\rangle=1$，但$\|y_{n_i}\|_{n_i}=0(i=1,2,\cdots)$。这也与$f$的连续性矛盾。

定理3.2.12 任意B_0空间$\mathscr{X}$具有足够多的连续线性泛函。

证 若f_0在$\mathscr{X}$的一个线性闭子空间$\mathscr{X}_0$上有定义且线性连续，则存在半模$\|\cdot\|_m$及常数$M_m>0$，使得

$$|\langle f_0,x\rangle|\leqslant M_m\|x\|_m\qquad(\forall x\in\mathscr{X}_0).$$

对于半模$\|\cdot\|_m$，应用Hahn-Banach定理，f_0可以扩张到全空间$\mathscr{X}$，成为f满足$f|_{\mathscr{X}_0}=f_0$，且

$$|\langle f,x\rangle|\leqslant M_m\|x\|_m\qquad(\forall x\in\mathscr{X});$$

从而$f\in\mathscr{X}^*$。于是对$\forall x_0\neq\theta$，$\exists f\in\mathscr{X}^*$，使得$\langle f,x_0\rangle=1$。

由定义即可推出

命题3.2.13 如果有一个B_0空间$\mathscr{X}$，满足$\mathscr{D}(\Omega)\underset{\varphi}{\subset\!\to}\mathscr{X}$，即$\mathscr{D}(\Omega)\subset\mathscr{X}$，并且

$$\varphi_j\to\varphi_0(\mathscr{D}(\Omega))\Rightarrow\varphi_j\to\varphi_0(\mathscr{X}),$$

那末$\mathscr{X}$上的任意一个线性连续泛函f，必有$f\in\mathscr{D}'(\Omega)$。

例3.2.14 $\mathscr{X}=\mathscr{E}(\Omega)$或$L^p(\Omega)(1\leqslant p<\infty)$或$C^k(\Omega)(k\in\mathbf{N})$等都满足$\mathscr{D}(\Omega)\subset\!\to\mathscr{X}$，从而有$\mathscr{E}'(\Omega)$，$L^q(\Omega)(1/p+1/q=1)$，$[C^k(\Omega)]^*$等都包含于$\mathscr{D}'(\Omega)$。

现在我们来用积分表示$\mathscr{S}'$中的广义函数。

定理3.2.15 为了$f\in\mathscr{S}'$，必须且仅须$\exists m\in\mathbf{N}$及$u_\alpha\in L^1(\mathbf{R}^n)(|\alpha|\leqslant m)$，使得

$$\langle f,\varphi\rangle=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_{\mathbf{R}^n}u_\alpha(x)\partial^\alpha\varphi(x)(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}}dx\quad(\forall\varphi\in\mathscr{S}).$$

证 充分性显然，只须证必要性。

(1) 先证明

$$\|\varphi\|'_m \triangleq \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_{R^n}(1+|x|^2)^m|\partial^\alpha\varphi(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad (m=1,2,\cdots)$$

是$\mathscr{S}$上的一组等价模。这是因为

$$\|\varphi\|'^2_m \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m}\sup_{x\in R^n}(1+|x|^2)^{m+n}|\partial^\alpha\varphi(x)|^2\int_{R^n}\frac{dx}{(1+|x|^2)^n}$$

$$\leqslant c\|\varphi\|^2_{m+n},$$

以及

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_m &= \sup_{\substack{|\alpha|\leqslant m\\ x\in R^n}}\left|(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}}\partial^\alpha\varphi(x)\right| \\
&\leqslant \sup_{|\alpha|\leqslant m}\int_{R^n}\left|\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}}\partial^\alpha\varphi(x)\right|dx \\
&\leqslant c\sup_{|\alpha|\leqslant m}\int_{R^n}(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}}|\partial^{\alpha+e}\varphi(x)|dx \\
&\qquad (\text{其中 } e=(1,\cdots,1)) \\
&\leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant m+n}\left(\int_{R^n}(1+|x|^2)^{m+n}|\partial^\alpha\varphi(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times\left(\int_{R^n}\frac{dx}{(1+|x|^2)^n}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant\leqslant c_1\|\varphi\|'_{m+n}.
\end{aligned}$$

(2) 对 f 应用引理3.2.11，$\exists\, m\in\mathbf{N}$，使得

$$|\langle f,\varphi\rangle|\leqslant c_m\|\varphi\|'_m \qquad (\forall\,\varphi\in\mathscr{S}). \tag{3.2.6}$$

于是 f 可以连续地扩张到以$\|\cdot\|'_m$为模的 Banach 空间 $\mathscr{H}_m$ 上。注意到$\|\cdot\|'_m$满足平行四边形等式，所以它可引出内积

$$(\varphi,\psi)_m=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_{R^n}\partial^\alpha\varphi(x)\partial^\alpha\psi(x)(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}}dx,$$

并且构成 Hilbert 空间。

(3) 现在应用 Riesz 表示定理，f 对应着$u\in\mathscr{H}_m$，使得

$$\langle f,\varphi\rangle=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_{R^n}\partial^\alpha u(x)\partial^\alpha\varphi(x)(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}}dx,$$

其中 $$\int_{\mathbb{R}^n}|\partial^\alpha u(x)|^2(1+|x|^2)^m dx<\infty.$$ 令

$$u_\alpha(x)=(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}}\partial^\alpha u(x)\quad(|\alpha|\leqslant m);$$

便有 $u_\alpha\in L^2(\mathbb{R}^n)$，并且对 $\forall\varphi\in\mathscr{S}$，有

$$\langle f,\varphi\rangle=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_{\mathbb{R}^n}u_\alpha(x)\partial^\alpha\varphi(x)(1+|x|^2)^{-\frac{m}{2}}dx. \quad (3.2.7)$$

习　题

3.2.1 验证：在例3.2.6中，$\mathscr{E}(\Omega)$上的收敛性与紧集列$\{K_m\}$的特殊选择无关。

3.2.2 设$\|\varphi\|'_m=\sup\limits_{\substack{|k|,|\alpha|\leqslant m\\ x\in\mathbb{R}^n}}|x^k\partial^\alpha\varphi(x)|\,(m=1,2,\cdots)$，求证：$\|\cdot\|'_m$是$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$上的等价可数模。

3.2.3 验证$\mathscr{D}_K(\Omega)$与$\mathscr{E}(\Omega)$都是B_0空间。

3.2.4 设$\mathscr{X}$是一个B_0^*空间，求证其一切线性泛函组成的空间$\mathscr{X}'$，按$*$弱收敛是完备的。特别地，$\mathscr{D}'_K,\mathscr{S}',\mathscr{E}'$都是完备的。

3.2.5 设G是复平面中的有界开连通区域。记$A(G)$为G上的解析函数全体，按下列方式规定可数半模组成的空间：设

$$G_1\subset\bar{G}_1\subset G_2\subset\bar{G}_2\subset\cdots\subset G_m\subset\bar{G}_m\subset\cdots\subset G$$

是一列连通集，$G_m(m=1,2,\cdots)$是开的，其边界由有穷多段可求长的曲线围成，满足：$\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bar{G}_m=G$。令

$$\|\varphi\|_m=\max_{z\in\bar{G}_m}|\varphi(z)|\qquad(\forall\varphi\in A(G)).$$

求证：$A(G)$是B_0空间，又若$\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty\subset A(G)$，有数列$\{M_m\}_1^\infty$，使得

$$\|\varphi_n\|\leqslant M_m\quad(m=1,2,\cdots;n=1,2,\cdots);$$

则$\{\varphi_n\}_1^\infty$必有收敛子列。

§3 广义函数的运算

设$A:\mathscr{D}(\bar{\Omega})\to\mathscr{D}(\Omega)$是一个线性算子，称它是连续的，是指

$$\varphi_j\to\varphi(\mathscr{D}(\Omega))\Rightarrow A\varphi_j\to A\varphi \quad (\mathscr{D}(\Omega)).$$

例3.3.1 任意微分算子∂^α是$\mathscr{D}(\Omega)$上的连续线性算子.

证 $\forall$相对紧集$K\subset\Omega$，$\partial^\alpha:\mathscr{D}_K\to\mathscr{D}_K$，并且

$$\|\partial^\alpha\varphi\|_m=\sum_{|\beta|\leqslant m}\max_{x\in K}|\partial^{\beta+\alpha}\varphi(x)|\leqslant\|\varphi\|_{m+|\alpha|}.$$

注 ∂^α在$L^2(\Omega)$上不是连续的！但却是闭的.

例3.3.2 乘法算子. 设$\psi\in C^\infty(\Omega)$，由ψ决定一个乘法算子

$$A:\varphi\longmapsto\psi\cdot\varphi \qquad (\forall\varphi\in C^\infty(\Omega)),$$

那末A是线性连续的.

证 因为$\forall$相对紧集$K\subset\Omega$，$A:\mathscr{D}_K\to\mathscr{D}_K$，且

$$\|\psi\cdot\varphi\|_m=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\max_{x\in K}|\partial^\alpha(\psi\cdot\varphi)(x)|$$

$$\leqslant\sum_{|\alpha|\leqslant m}\max_{x\in K}\left|\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^\beta\psi(x)\partial^{\alpha-\beta}\varphi(x)\right|$$

$$\leqslant C(m,\psi)\|\varphi\|_m. \quad \blacksquare$$

在$\mathscr{D}'(\Omega)$上定义算子A^*如下：

$$\langle A^*f,\varphi\rangle=\langle f,A\varphi\rangle \quad (\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega),\forall f\in\mathscr{D}'(\Omega)).$$

显然，$A^*:\mathscr{D}'(\Omega)\to\mathscr{D}'(\Omega)$并且是连续的. 事实上，如果$f_j\to f(\mathscr{D}(\Omega))$，那末对$\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$，有

$$\langle A^*f_j,\varphi\rangle=\langle f_j,A\varphi\rangle\to\langle f,A\varphi\rangle=\langle A^*f,\varphi\rangle;$$

即得$A^*f_j\to A^*f$.

按照这种方式我们来定义广义函数的各种运算.

3.1 广义微商

定义3.3.3 称$\tilde{\partial}^\alpha=(-1)^\alpha(\partial^\alpha)^*$为$\alpha$阶广义微商运算，即$\forall f\in\mathscr{D}'(\Omega)$，

$$\langle\tilde{\partial}^{\alpha}f,\varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle f,\tilde{\partial}^{\alpha}\varphi\rangle\qquad(\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)).$$

注 1 若 $f(x)\in C^1(\Omega)$，依自然对应：

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_{\Omega}f(x)\varphi(x)dx\qquad(\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega))$$

产生的广义函数 f 有广义微商 $\tilde{\partial}_{x_i}f$（即 $\tilde{\partial}^{\alpha}f$，$\alpha=(\overbrace{0,\cdots,0,1}^{i},0,\cdots,0)$），同时 $f(x)$ 有普通的微商 $\partial_{x_i}f$，我们说 $\tilde{\partial}_{x_i}f$ 正是 $\partial_{x_i}f$ 对应的广义函数。这是因为

$$\langle\tilde{\partial}_{x_i}f,\varphi\rangle=-\langle f,\partial_{x_i}\varphi\rangle=-\int_{\Omega}f(x)\partial_{x_i}\varphi(x)dx$$

$$=\int_{\Omega}\partial_{x_i}f(x)\varphi(x)dx\qquad(\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)).$$

注 2 广义函数对微商运算是封闭的，即任意广义函数 $f\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 都可以作任意次广义微商。当然，即使是局部可积函数，也未必能作普通微商；但当把它看作广义函数时，总可以作广义微商，作广义微商后所得的是广义函数，未必是普通函数。

注 3 若 α，β 是任意两个多重指标，则

$$\tilde{\partial}^{\alpha}\cdot\tilde{\partial}^{\beta}=\tilde{\partial}^{\alpha+\beta}=\tilde{\partial}^{\beta}\cdot\tilde{\partial}^{\alpha}.$$

注 4 由 $\tilde{\partial}^{\alpha}$ 的连续性，

$$f_j\to f_0\Rightarrow\tilde{\partial}^{\alpha}f_j\to\tilde{\partial}^{\alpha}f_0.$$

可见广义微商与极限总是可交换的

公式3.3.4 若

$$Y(x)=\begin{cases}1 & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$$

则
$$\tilde{\partial}_x Y(x)=\delta(x).$$

证 $\langle\tilde{\partial}_x Y,\varphi\rangle=-\langle Y,\partial_x\varphi\rangle=-\int_0^{\infty}\varphi'(x)dx$

$$=\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle\qquad(\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^1)).$$

公式3.3.5 若 $\delta^{(\alpha)}$ 是例3.1.9引进的广义函数，则

$$\tilde{\partial}^{\alpha}\delta=\delta^{(\alpha)}.$$

证 $\langle\tilde{\partial}^{\alpha}\delta,\varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle\delta,\partial^{\alpha}\varphi\rangle$

$$=(-1)^{|\alpha|}(\partial^{\alpha}\varphi)(\theta)=\langle\delta^{(\alpha)},\varphi\rangle.$$

公式3.3.6 设 $\tilde{\Delta}=\tilde{\partial}^2_{x_1}+\cdots+\tilde{\partial}^2_{x_n}$，那末

$$\tilde{\Delta}|x|^{2-n}=(2-n)\Omega_n\delta(x)\qquad(n\geqslant 3),$$

$$\tilde{\Delta}\ln|x|=2\pi\delta(x)\qquad(n=2),$$

其中 Ω_n 是 $\mathbf{R}^n$ 中单位球面的面积。

证 (1) 当 $n\geqslant 3$ 时，$\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，我们有

$$\langle\tilde{\Delta}|x|^{2-n},\varphi\rangle=\langle|x|^{2-n},\Delta\varphi\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geqslant\varepsilon}|x|^{2-n}\Delta\varphi(x)dx$$

$$\overset{\text{Green公式}}{=\!=}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{|x|\geqslant\varepsilon}\Delta|x|^{2-n}\varphi(x)dx\right.$$

$$\left.+\int_{|x|=\varepsilon}\left(\varphi\frac{\partial|x|^{2-n}}{\partial r}-r^{2-n}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)d\sigma\right],$$

其中 $d\sigma$ 是球面 $\{x\in\mathbf{R}^n\,|\,|x|=\varepsilon\}$ 上的面积元，$r=|x|$；上式之所以成立是由于 φ 具有紧支集，所以可以取一充分大的球 $B(\theta,R)=\{x\in\mathbf{R}^n\,|\,|x|<R\}$，使得 $\mathrm{supp}(\varphi)\subset B(\theta,R)$，再应用Green公式。注意到

$$\Delta|x|^{2-n}=0\qquad(当|x|\neq 0),$$

$$\varepsilon^{2-n}\int_{|x|=\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial r}d\sigma=O(\varepsilon)\to 0\qquad(当\varepsilon\to 0),$$

而

$$\varepsilon^{1-n}\int_{|x|=\varepsilon}\varphi(x)d\sigma\to\varphi(0)\Omega_n\quad(当\ \varepsilon\to 0),$$

即得

$$\langle\Delta|x|^{2-n},\varphi\rangle=(2-n)\varphi(0)\Omega_n$$

$$=(2-n)\Omega_n\langle\delta,\varphi\rangle\qquad(\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^2)).$$

(2) 同样方法证明

$$\langle\Delta\ln|x|,\varphi\rangle=2\pi\langle\delta,\varphi\rangle\qquad(\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^2)),$$

3.2　广义函数的乘法

对于任意的 $\psi\in C^\infty(\Omega)$，以及 $f\in\mathscr{D}'(\Omega)$，定义

$$\langle\psi f,\varphi\rangle=\langle f,\psi\varphi\rangle \qquad (\forall\,\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)),$$

即定义广义函数对 $C^\infty(\Omega)$ 函数的乘法为 $\mathscr{D}(\Omega)$ 上乘法算子的共轭算子。显然它也是连续算子。

公式3.3.7

$$x^n\tilde{\partial}^m\delta(x)=\begin{cases}(-1)^n\dfrac{m!}{(m-n)!}\delta^{(m-n)}(x) & (m\geqslant n),\\ 0 & (m<n).\end{cases}$$

证

$$\langle x^n\tilde{\partial}^m\delta(x),\varphi(x)\rangle=(-1)^m\langle\delta(x),\partial^m(x^n\varphi(x))\rangle$$

$$=(-1)^m\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}(\partial^r x^n)(\partial^{m-r}\varphi(x))\big|_{x=0}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(-1)^m m!}{n!\,(m-n)!}\,n!\,(\partial^{m-n}\varphi)(0) & (\text{当 } m\geqslant n)\\ 0 & (\text{当 } m<n)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(-1)^n m!}{(m-n)!}\langle\delta^{(m-n)},\varphi\rangle & (\text{当 } m\geqslant n),\\ 0 & (\text{当 } m<n).\ \blacksquare\end{cases}$$

容易看出，当 $f\in L^1_{loc}(\Omega)$ 时，对 $\forall\,\psi\in C^\infty(\Omega)$，$\psi f$ 的通常定义与作为广义函数的定义是一致的。

注　一般不能定义两个广义函数的乘积，特别是两个 δ 函数相乘，因其结果不再是广义函数。

3.3　平移算子与反射算子

$\forall\,x_0\in\mathbb{R}^n$，定义 $\tau_{x_0}:\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\to\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 为

$$(\tau_{x_0}\varphi)(x)=\varphi(x-x_0) \qquad (\forall\,\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)),$$

我们称 τ_{x_0} 为平移算子。易见 $\tau_{x_0}\in\mathscr{L}(\mathscr{D}(\mathbb{R}^n))$。

定义3.3.8　$\forall\,x_0\in\mathbb{R}^n$，$\tau_{x_0}\triangleq(\tau_{-x_0})^*$。即对 $\forall\,f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$，我们有

$\langle\tilde{\tau}_{x_0}f,\varphi\rangle=\langle f,\tau_{-x_0}\varphi\rangle=\langle f,\varphi(x+x_0)\rangle\quad(\forall\,\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n))$.

注 $\tilde{\tau}_{x_0}$ 是平移算子的推广。事实上，若 $f(x)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$，则对 $\forall\,x_0\in\mathbf{R}^n$，我们有

$$\int_{R^n}f(x-x_0)\varphi(x)dx=\int_{R^n}f(x)\varphi(x+x_0)dx$$

$$=\langle f,\tau_{-x_0}\varphi\rangle=\langle\tilde{\tau}_{x_0}f,\varphi\rangle\quad(\forall\,\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)),$$

即得 $\tilde{\tau}_{x_0}f=f(x-x_0)=\tau_{x_0}f$。 ▍

$$\sigma:\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)\to\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)\text{定义为}$$

$$(\sigma\varphi)(x)=\varphi(-x)\qquad(\forall\,\varphi\in\mathbf{R}^n),$$

我们称 σ 为反射算子。易见 $\sigma\in\mathscr{L}(\mathscr{D}(\mathbf{R}^n))$。

定义3.3.9 $\tilde{\sigma}\triangleq\sigma^*$。即对 $\forall\,f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，

$$\langle\tilde{\sigma}f,\varphi\rangle=\langle\sigma^*f,\varphi\rangle=\langle f,\sigma\varphi\rangle\quad(\forall\,\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)).$$

注 $\tilde{\sigma}$ 是反射算子的推广。事实上，若 $f(x)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$，则有

$$\int_{R^n}f(-x)\varphi(x)dx=\int_{R^n}f(x)\varphi(-x)dx$$

$$=\langle f,\sigma\varphi\rangle=\langle\tilde{\sigma}f,\varphi\rangle\quad(\forall\,\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)),$$

即得 $\tilde{\sigma}f=f(-x)=\sigma f$。

习　题

3.3.1 计算

(1) $\partial_x^2|x|$；　　　(2) $\partial^n x_+^\lambda\,(\lambda\in\mathbf{R}^1,\lambda\neq-1,-2,\cdots)$，

其中

$$x_+^\lambda=\begin{cases}x^\lambda & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0).\end{cases}$$

3.3.2 求证：

$$\frac{d}{dx}\ln|x|=\mathrm{P.V.}\left(\frac{1}{x}\right),$$

即

$$\left\langle\frac{d}{dx}\ln|x|,\varphi\right\rangle=\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx\quad(\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^1)).$$

3.3.3 设 $\Omega=(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}^1$, $x_0\in\Omega$, 又设 $f\in C^1(\Omega\setminus\{x_0\})$, x_0 是 f 的第一类间断点且 f' 在 $\Omega\setminus\{x_0\}$ 内有界。求证:

$$\frac{d}{dx}f=f'+[f(x_0+0)-f(x_0-0)]\delta(x_0).$$

3.3.4 求证: 对 $\forall f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\tilde{\partial}_{x_i}f=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}(\tau_{-he_i}f-f),$$

其中

$$e_i=(\underbrace{0,\cdots0,1}_{i},0,\cdots,0)\qquad(i=1,2,\cdots,n).$$

3.3.5 求证: 对 $\forall f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, 以及 $\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, 函数

$$g(y)=\langle f,\ \tau_{-y}\varphi\rangle\in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

3.3.6 求证: 每个 $f\in\mathscr{S}'$ 必是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 函数乘以多项式的广义微商之有限和。即 $\exists u_\alpha\in L^2(\mathbb{R}^n)$及偶数 m, 使得

$$f=(-1)^{|\alpha|}\sum_{|\alpha|\leq m}\tilde{\partial}^\alpha[(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}}u_\alpha].$$

提示 利用(3.2.7)式。(3.2.7)中的 m 可以认为是偶数，这是因为必要的话可在(3.2.6)中用 $2m$ 取代 m。

§4 $\mathscr{S}'$ 上的 Fourier 变换

对于 $\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n)$, φ 的 Fourier 变换定义如下:

$$(\mathscr{F}\varphi)(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\exp(-2\pi ix\cdot\xi)dx,\qquad(3.4.0)$$

其中 $x\cdot\xi=x_1\xi_1+x_2\xi_2+\cdots+x_n\xi_n$。

熟悉分析的人都知道，Fourier 变换无论是在理论上还是在应用上都是十分重要的工具。但是，能定义 Fourier 变换的函数

实在受限制太强了。一般的 $L^p(\mathbb{R}^n)(p>1)$ 函数未必在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中，从而积分(3.4.0)可能没有意义。最简单的函数 $\varphi(x)\equiv 1$(或更一般的多项式)，更无从使(3.4.0)的积分收敛。引进广义函数的另一个重要推动力是扩大 Fourier 变换的定义，使得这个重要工具能够方便而又灵活地运用。

命题3.4.1 $\mathscr{F}\in\mathscr{L}(\mathscr{S})$。

证 注意以下两件事实：

(1) $\mathscr{F}(\partial^\alpha\varphi)=(2\pi i\xi)^\alpha(\mathscr{F}\varphi)(\xi)$;

(2) $\mathscr{F}((-2\pi ix)^\alpha\varphi)(\xi)=\partial^\alpha(\mathscr{F}\varphi)(\xi)$.

便有

$$
\begin{aligned}
\|\mathscr{F}\varphi\|_m &= \sup_{\substack{\xi\in R^n\\|\alpha|\leqslant m}}(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}|\partial^\alpha(\mathscr{F}\varphi)(\xi)|\\
&= \sup_{\substack{\xi\in R^n\\|\alpha|\leqslant m}}\left|\left(\mathscr{F}\left[\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^{\frac{m}{2}}(-2\pi ix)^\alpha\varphi\right]\right)(\xi)\right|\\
&\leqslant \sup_{|\alpha|\leqslant m}\int_{R^n}\left|\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^{\frac{m}{2}}(-2\pi ix)^\alpha\varphi\right|dx\\
&\leqslant \sup_{|\alpha|\leqslant m}\sum_{\substack{p\leqslant\alpha\\q_j\leqslant m}}A_{\alpha,p,q}\int_{R^n}|x^p\partial^q\varphi|dx\\
&\leqslant M_m\sup_{\substack{x\in R^n\\|\alpha|\leqslant m}}(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}+n}|\partial^\alpha\varphi(x)|\\
&\leqslant M_m\|\varphi\|_{m+2n}\qquad(m=2,4,6,\cdots),
\end{aligned}
$$

其中 $A_{\alpha,p,q}$ 及 M_m 皆为常数。 ∎

称积分

$$(\overline{\mathscr{F}}\varphi)(\xi)=\int_{R^n}\varphi(x)\exp[2\pi ix\cdot\xi]dx$$

为函数φ的 Fourier 逆变换，或 Fourier 积分。

命题3.4.2 $\overline{\mathscr{F}}=\sigma\mathscr{F}$，从而$\overline{\mathscr{F}}\in\mathscr{L}(\mathscr{S})$。

命题3.4.3 若 $\varphi,\psi\in\mathscr{S}$，则

$$\langle \mathscr{F}\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, \mathscr{F}\psi\rangle, \tag{3.4.1}$$

$$\langle \overline{\mathscr{F}}\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, \overline{\mathscr{F}}\psi\rangle . \tag{3.4.2}$$

证 $\langle \mathscr{F}\varphi, \psi\rangle = \int_{R^n}\left[\int_{R^n}\varphi(x)\exp[-2\pi i x\cdot\xi]dx\right]\psi(\xi)d\xi$

$$\overset{\text{Fubini定理}}{=\!=\!=} \int_{R^n}\varphi(x)\left[\int_{R^n}\exp[-2\pi i x\cdot\xi]\psi(\xi)d\xi\right]dx$$

$$= \langle \varphi, \mathscr{F}\psi\rangle,$$

即得(3.4.1)。同理可证(3.4.2)。

定义3.4.4 在空间 $\mathscr{S}'$ 上定义 $\tilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F}^*$, ($\tilde{\overline{\mathscr{F}}} = (\overline{\mathscr{F}})^*$) 称为广义 Fourier((逆)变换。在不会混淆时，记号～可以略去。有时为了方便简记 $\mathscr{F}\varphi = \hat{\varphi}$。

从定义容易推出

命题3.4.5 $\mathscr{F} \in \mathscr{L}(\mathscr{S}')$, $\overline{\mathscr{F}} \in \mathscr{L}(\mathscr{S}')$，而且当限制在$\mathscr{S}$上时，它们分别与普通的 Fourier 变换，Fourier 逆变换一致。 ▌

关于 Fourier变换，微商与乘法之间、平移与相移之间有着重要的联系，见表3.4.1. 在表中用"$f \circ\!-\!\bullet\, g$"表示 $g = \mathscr{F}f$ 或 $f = \overline{\mathscr{F}}g$。

表 3.4.1

结论 \ 假设 编号	$f \circ\!-\!\!-\!\bullet\, g$
(1)	$\tilde{\partial}^\alpha f \circ\!-\!\!-\!\bullet\, (2\pi i\xi)^\alpha g$
(2)	$(-2\pi i x)^\alpha f \circ\!-\!\!-\!\bullet\, \tilde{\partial}^\alpha g$
(3)	$\tilde{\tau}_a f \circ\!-\!\!-\!\bullet\, \exp[-2\pi i a\cdot\xi]g$
(4)	$\exp[2\pi i a\cdot x]f \circ\!-\!\!-\!\bullet\, \tilde{\tau}_a g$

公式3.4.6 $\mathscr{F}[\exp(-\pi|x|^2)] = \exp(-\pi|\xi|^2)$。

证 设 $n=1$，令 $f(x) = \exp(-\pi x^2)$，便有

$$f'(x)+2\pi x f(x)=0,\qquad f(0)=1.$$

在方程两边作 Fourier 变换，有

$$2\pi i\xi(\mathscr{F}f)(\xi)+i(\mathscr{F}f)'(\xi)=0,$$

$$(\mathscr{F}f)(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-\pi x^2]dx=1.$$

即 $\mathscr{F}f$ 与 f 满足同一方程，具相同初值，利用常微分方程初值问题解的唯一性，可得

$$(\mathscr{F}f)(\xi)=f(\xi)=\exp(-\pi|\xi|^2)\qquad(\forall\xi\in\mathbf{R}^1).$$

对于任意的 $n\in\mathbf{N}$，利用分离变量立得。

公式3.4.7 $\mathscr{F}\delta=1,\overline{\mathscr{F}}\delta=1.$

证 因为 $\forall\varphi\in\mathscr{S}$，

$$\langle\mathscr{F}\delta,\varphi\rangle=\langle\delta,\mathscr{F}\varphi\rangle=(\mathscr{F}\varphi)(0)\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)dx=\langle 1,\varphi\rangle.$$

公式3.4.8 $\mathscr{F}(1)=\delta,\overline{\mathscr{F}}(1)=\delta.$

证 由公式3.4.6可见

$$\mathscr{F}\left[\exp\left(-\pi\frac{|x|^2}{m}\right)\right]=m^{\frac{n}{2}}\exp(-m\pi|\xi|^2).$$

当令 $m\to\infty$ 时，

$$\exp\left(-\pi\frac{|x|^2}{m}\right)\to 1\qquad(\mathscr{S}'),$$

而

$$m^{\frac{n}{2}}\exp(-m\pi|\xi|^2)\to\delta\qquad(\mathscr{S}').$$

由 $\mathscr{F}$ 的连续性即得 $\mathscr{F}(1)=\delta$。同理可证另一个公式。

公式3.4.9

(1) $\mathscr{F}(p(x))=p\left(\frac{i}{2\pi}\partial\right)\delta(\xi)$，其中 $p(\cdot)$ 表示多项式；

(2) $\mathscr{F}(\partial^\alpha\delta)=(2\pi i\xi)^\alpha$.

证 表3.4.1(2)＋公式3.4.8⇒(1)。

表3.4.1(1)＋公式3.4.7⇒(2)。

定理3.4.10 $\overline{\mathscr{F}}=\mathscr{F}^{-1}$，即 $\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}=\mathscr{F}\overline{\mathscr{F}}=I$.

证 $\forall \varphi\in\mathscr{S}$, $\forall y\in\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\varphi(y) &= \langle\delta,\tau_{-y}\varphi\rangle = \langle\tau_y\delta,\varphi\rangle\\ &= \langle\mathscr{F}(\exp[2\pi i\xi\cdot y]),\varphi\rangle \quad (\text{表}3.4.1(4))\\ &= \langle\exp[2\pi i\xi\cdot y],(\mathscr{F}\varphi)(\xi)\rangle\\ &= \int_{R^n}\exp[2\pi i\xi\cdot y](\mathscr{F}\varphi)(\xi)d\xi = (\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}\varphi)(y),\end{aligned}$$

即得 $\varphi=\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}\varphi$。同理可证 $\varphi=\mathscr{F}\overline{\mathscr{F}}\varphi$。于是对 $\forall f\in\mathscr{S}'$，我们有

$$\langle\mathscr{F}\overline{\mathscr{F}}f,\varphi\rangle = \langle f,\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle \qquad (\forall\varphi\in\mathscr{S}),$$

$$\langle\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}f,\varphi\rangle = \langle f,\ \mathscr{F}\overline{\mathscr{F}}\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle \qquad (\forall\varphi\in\mathscr{S}).$$

即得 $\overline{\mathscr{F}}=\mathscr{F}^{-1}$。

推论3.4.11(Plancherel 定理) 若 $f\in L^2$，则 $\widetilde{\mathscr{F}}f\in L^2$，并且

$$\|f\|_{L^2} = \|\widetilde{\mathscr{F}}f\|_{L^2} \qquad (\widetilde{\mathscr{F}}\text{保持范数不变}) \quad (3.4.3)$$

证 因为对 $\forall\varphi\in\mathscr{S}$ 有

$$\|\varphi\|_{L^2}^2 = \langle\varphi,\bar{\varphi}\rangle = \langle\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}\varphi,\bar{\varphi}\rangle = \langle\mathscr{F}\varphi,\ \overline{\mathscr{F}}\bar{\varphi}\rangle = \|\mathscr{F}\varphi\|_{L^2}^2,$$

而 $\mathscr{S}$ 在 L^2 中稠(见习题3.1.1)，所以对 $\forall f\in L^2$，$\exists\{\varphi_m\}\subset\mathscr{S}$，使得

$$\|\varphi_m - f\|_{L^2}\to 0 \qquad (m\to\infty).$$

于是对 $\forall p\in\mathbf{N}$，我们有

$$\|\mathscr{F}\varphi_{m+p}-\mathscr{F}\varphi_m\|_{L^2}\to 0 \qquad (m\to\infty);$$

即 $\{\mathscr{F}\varphi_m\}_1^\infty$ 是 L^2 中的基本列。由于 $\mathscr{F}$ 在 $\mathscr{S}'$ 中连续以及 $L^2\hookrightarrow\mathscr{S}'$，可见

$$\widetilde{\mathscr{F}}f = \lim_{m\to\infty}\mathscr{F}\varphi_m(L^2).$$

这表明 $\widetilde{\mathscr{F}}f\in L^2$，并且

$$\|\widetilde{\mathscr{F}}f\|_{L^2} = \lim_{m\to\infty}\|\mathscr{F}\varphi_m\|_{L^2} = \lim_{m\to\infty}\|\varphi_m\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

注 根据习题1.6.1(极化恒等式)与本推论容易推出：若 f,

$g\in L^2$，则

$$(f,g)_{L^2}=(\widetilde{\mathscr{F}}f,\widetilde{\mathscr{F}}g)_{L^2}\qquad(\widetilde{\mathscr{F}}\text{保持内积不变}).$$

(3.4.4)

习　题

3.4.1　设 $H^m(\mathbf{R}^n)=\{u\in\mathscr{S}'\,|\,\partial^\alpha u\in L^2(\mathbf{R}^n)(|\alpha|\leqslant m)\}$，其中范数定义为

$$\|u\|_m=\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

又对 $\forall u\in H^m(\mathbf{R}^n)$，定义

$$\|u\|_m'=\Big(\int_{\mathbf{R}^n}(1+|\xi|^2)^m|(\mathscr{F}u)(\xi)|^2d\xi\Big)^{\frac{1}{2}},$$

求证：

(1) $\|u\|_m'<\infty$；

(2) $\|\cdot\|_m'$ 是 $H^m(\mathbf{R}^n)$的等价模；

(3) $H^m(\mathbf{R}^n)$是完备的。

3.4.2　对任意的非负实数 s，设

$$H^s(\mathbf{R}^n)=\{u\in L^2(\mathbf{R}^n)\,|\,(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi)\in L^2(\mathbf{R}^n)\},$$

其中范数定义为

$$\|u\|_s=\|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi)\|_{L^2};$$

求证：

(1) 当 $s=m\in\mathbf{N}$时，这种定义与原来 $H^m(\mathbf{R}^n)$的定义等价；

(2) $H^s(\mathbf{R}^n)$中可引进内积$(\cdot,\cdot)$，使得$\|u\|_s=(u,u)^{1/2}$；

(3) 设 $u\in H^s(\mathbf{R}^n)'$，求证：存在 $\tilde{u}\in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$，使得

$$\tilde{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^{-s/2}\in L^2(\mathbf{R}^n),$$

并且

$$\langle u,\mathscr{F}\varphi\rangle=\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(\xi)\cdot\tilde{u}(\xi)d\xi\qquad(\forall\varphi\in\mathscr{S}).$$

3.4.3　设 $f(x)\in L^1(\mathbf{R}^n)$，求证：

$$(\widetilde{\mathscr{F}}f)(\xi)=\int_{R^n}f(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx,$$

即，$f(x)$按$\mathscr{S}'$的 Fourier 变换与普通的 Fourier 变换一致。

3.4.4 求证：方程$\Delta f=f$在$\mathscr{S}'(\mathrm{R}^n)$中无非零解。

§5 Соболев 空间与嵌入定理

定义3.5.1 设 $\Omega\subset\mathrm{R}^n$ 是一个开集，m 是非负整数，$1\leqslant p<\infty$，称集合

$$W^{m,p}(\Omega)=\{u\in L^p(\Omega)\,|\,\tilde{\partial}^\alpha u\in L^p(\Omega),|\alpha|\leqslant m\},$$

按模

$$\|u\|_{m,p}=\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|\tilde{\partial}^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega|\tilde{\partial}^\alpha u(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

构成的空间为 Соболев 空间，记作 $W^{m,p}(\Omega)$或 $W^m_p(\Omega)$。

定理3.5.2 空间 $W^m_p(\Omega)$是完备的。

证 设$\{u_k\}_1^\infty$是 $W^m_p(\Omega)$中的基本列，那末$\{\tilde{\partial}^\alpha u_k\}$是 $L^p(\Omega)$中的基本列。$\forall\,\alpha(|\alpha|\leqslant m)$，由 $L^p(\Omega)$的完备性，$\exists\,g_\alpha\in L^p(\Omega)$，使得

$$\|\tilde{\partial}^\alpha u_k-g_\alpha\|_{L^p(\Omega)}\to 0\qquad(k\to\infty)(|\alpha|\leqslant m).$$

从而$\forall\,\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$，当 $k\to\infty$时，

$$\begin{array}{ccc}\langle\tilde{\partial}^\alpha u_k,\varphi\rangle & = & (-1)^{|\alpha|}\langle u_k,\partial^\alpha\varphi\rangle\\ \downarrow & & \downarrow\\ \langle g_\alpha,\varphi\rangle & & (-1)^{|\alpha|}\langle g_0,\partial^\alpha\varphi\rangle\end{array}$$

即得 $g_\alpha=\tilde{\partial}^\alpha g_0$。由此推出 $g_0\in W^m_p(\Omega)$，且

$$\|u_k-g_0\|_{m,p}\to 0\qquad(k\to\infty).$$

定理3.5.3 $\mathscr{D}(\mathrm{R}^n)$在 $W^m_p(\mathrm{R}^n)$中是稠密的。

证 设 $u\in W^m_p(\mathrm{R}^n)$，即$\tilde{\partial}^\alpha u\in L^p(\mathrm{R}^n)(|\alpha|\leqslant m)$。我们对

$\forall\delta>0$，令

$$u_\delta(x)=\int_{\mathbf{R}^n}u(y)j_\delta(x-y)dy,\qquad(3.5.1)$$

其中 j_δ 是按(3.1.2)定义的函数。稍稍修饰命题3.1.2的证明，即得 $u_\delta\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$，并且

$$\begin{aligned}\partial_x^\alpha u_\delta(x)&=\int_{\mathbf{R}^n}u(y)\partial_x^\alpha j_\delta(x-y)dy\\&=(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbf{R}^n}u(y)\partial_y^\alpha j_\delta(x-y)dy\\&=\int_{\mathbf{R}^n}\tilde{\partial}^\alpha u(y)j_\delta(x-y)dy,\end{aligned}$$

即 $\partial^\alpha u_\delta=(\tilde{\partial}^\alpha u)_\delta$。应用Young不等式(引理2.5.14)，$\forall v\in L^p(\mathbf{R}^n)$有

$$\|(v)_\delta\|_{L^p}\leqslant\|v\|_{L^p}.\qquad(3.5.2)$$

然而 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 函数可以被 $C_0^0(\mathbf{R}^n)$ 函数任意逼近。对 $\tilde{\partial}^\alpha u\in L^p(\mathbf{R}^n)$，即有 $\forall\varepsilon>0$，$\exists v_\alpha\in C_0^0(\mathbf{R}^n)$，使得

$$\|v_\alpha-\tilde{\partial}^\alpha u\|_{L^p}<\frac{\varepsilon}{3}.\qquad(3.5.3)$$

按(3.5.2)得

$$\|(v_\alpha)_\delta-(\tilde{\partial}^\alpha u)_\delta\|_{L^p}<\frac{\varepsilon}{3}.\qquad(3.5.4)$$

再应用定理3.1.3，$\exists\delta_0=\delta_0(\varepsilon,\alpha)>0$，当 $0<\delta<\delta_0$ 时，

$$\|(v_\alpha)_\delta-v_\alpha\|_{L^p}<\frac{\varepsilon}{3}\qquad(3.5.5)$$

(注意：$\operatorname{supp}v_\alpha$ 是紧的)。联合(3.5.3)，(3.5.4)与(3.5.5)得

$$\|(\tilde{\partial}^\alpha u)_\delta-\tilde{\partial}^\alpha u\|_{L^p}<\varepsilon,$$

即 $\|\partial^\alpha u_\delta-\tilde{\partial}^\alpha u\|_{L^p}<\varepsilon\ (|\alpha|\leqslant m)$。

注 如果用 $W_0^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 表示 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 按模 $\|\cdot\|_{m,p}$ 完备化产生

的空间，则依此定理有

$$W_0^{m,p}(\mathbf{R}^n)=W^{m,p}(\mathbf{R}^n).$$

但是对于一般的开集 Ω，$W_0^{m,p}(\Omega)=W^{m,p}(\Omega)$ 未必成立。

在第一章，我们曾把 $H^{m,p}(\Omega)$ 定义为集合

$$S\triangleq\{u\in C^\infty(\Omega)\,|\,\|u\|_{m,p}<\infty\} \tag{3.5.6}$$

在模 $\|\cdot\|_{m,p}$ 下的完备化空间，并把它称为 Соболев 空间。现在我们又称 $W^{m,p}(\Omega)$ 为 Соболев 空间，它们之间究竟有什么关系？

定理3.5.2表明：$H^{m,p}(\Omega)\subset W^{m,p}(\Omega)$。其实还可以证明它们二者等价。这要用到一个在微分流形中重要的 C^∞ 单位分解定理如下：

定理3.5.4 若 $A\subset\mathbf{R}^n$，而且 $\mathscr{O}$ 是 A 的一个开覆盖，那末必有一族 C^∞ 的函数 $\mathscr{F}$，使得 $\forall\varphi\in\mathscr{F}$ 定义在包含 A 的一个开集上，具有下列性质：

(1) $0\leqslant\varphi(x)\leqslant1\quad(\forall x\in A)$；

(2) $\forall x\in A$，$\exists$ 含 x 的开集 V，使得只有有穷多个 $\varphi\in\mathscr{F}$ 在其上非零；

(3) $\sum\limits_{\varphi\in\mathscr{F}}\varphi(x)=1\quad(\forall x\in A)$；

(4) $\forall\varphi\in\mathscr{F}$，$\exists U\in\mathscr{O}$，使得 $\operatorname{supp}\varphi\subset U$。

这个定理的证明在许多教科书上可以找到（例如 M.斯皮瓦克著，齐民友，路见可译《流形上的微积分》，科学出版社，1981.），兹从略。

定理3.5.5（Meyers-Serrin） 若 $1\leqslant p<\infty$，则

$$H^{m,p}(\Omega)=W^{m,p}(\Omega).$$

证 只须证明(3.5.6)定义的集合 S 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中是稠密的。记

$$\Omega_k\triangleq\left\{x\in\Omega\,|\,\|x\|<k\text{ 且 }\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)>\frac{1}{k}\right\}\quad(k=1,2,\cdots),$$

并记 $\Omega_0=\Omega_{-1}=\varnothing$。那末

$$\mathscr{O}=\{U_k \mid U_k=\Omega_{k+1}\cap C\bar{\Omega}_{k-1},\ k=1,2,\cdots\}$$

是 Ω 的一族开覆盖。记 $\mathscr{F}$ 为 C^∞ 单位分解定理中的关于 $\mathscr{O}$ 的一族 C^∞ 函数。注意到 $\bar{U}_k$ 是紧集，由单位分解的性质(2)，$\mathscr{F}$ 中只有有限多个函数 φ，使得 $\operatorname{supp}\varphi\subset U_k$，记 ψ_k 为这些函数之和；那末

$$\psi_k\in C_0^\infty(U_k),\quad 而且\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(x)\equiv 1\quad (\forall x\in\Omega).$$

设 $u\in W^{m,p}(\Omega)$，$\forall\varepsilon>0$，下面要找 S 中的函数 φ，使得 $\|u-\varphi\|_{m,p}\leqslant\varepsilon$。当 $0<\delta<1/(k+1)(k+2)$ 时，用(3.5.1)中定义的记号，可见

$$\operatorname{supp}(\psi_k u)_\delta\subset\Omega_{k+2}\cap C\bar{\Omega}_{k-2},$$

按定理3.5.3证明中的办法可见 $\exists\delta_k\in(0,1/(k+1)(k+2))$ 适合：

$$\|\psi_k u-(\psi_k u)_{\delta_k}\|_{m,p}<\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

令 $\varphi=\sum_{k=1}^{\infty}(\psi_k u)_{\delta_k}$，因为对 $\forall x\in\Omega$ 这个和式中只有有限项不为0，所以 $\varphi\in C^\infty(\Omega)$。又 $\forall k\in\mathbf{N}$，在 Ω_k 上，

$$u(x)=\sum_{j=1}^{k+2}\psi_j(x)u(x),$$

$$\varphi(x)=\sum_{j=1}^{k+2}(\psi_j u)_{\delta_j}(x);$$

因此
$$\|u-\varphi\|_{W^{m,p}(\Omega_k)}\leqslant\sum_{j=1}^{k+2}\|(\psi_j u)_{\delta_j}-\psi_j u\|_{m,p}<\varepsilon.$$

再令 $k\to\infty$，即得 $\|u-\varphi\|_{m,p}\leqslant\varepsilon$。显然可见 $\varphi\in S$，这就是我们所要的。

定义3.5.6 $\mathbf{R}^n$ 中的开区域 Ω 称为是可扩张的，如果 $\forall m\in\mathbf{N}$，$\forall p\in[1,\infty]$，$\exists T: W^{m,p}(\Omega)\to W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 连续，并满足

$$Tu|_{\Omega}=u \qquad (\forall u\in W^{m,p}(\Omega)).$$

例3.5.7 $\mathbf{R}^n_+=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n \mid x_n>0\}$是可扩张的。扩张算子构造如下：$\forall m\in\mathbf{N}$, $\forall u\in C^\infty(\mathbf{R}^n_+)$，我们定义

$$E_m u(x)=\begin{cases} u(x) & (\text{当 } x_n>0), \\ \sum_{j=1}^{m+1}\lambda_j u(x_1,\cdots,x_{n-1},-jx_n) & (\text{当 } x_n\leqslant 0), \end{cases}$$

其中系数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{m+1}$是$(m+1)\times(m+1)$线性方程组

$$\sum_{j=1}^{m+1}(-j)^i\lambda_j=1 \qquad (i=0,1,\cdots,m)$$

的唯一解。不难验证：如果$u\in C^m(\overline{R^n_+})$，则$E_m u\in C^m(\mathbf{R}^n)$，并且

$$\|E_m u\|_{W^{m,p}(R^n)}\leqslant M_{m,p}\|u\|_{W^{m,p}(R^n_+)},$$

其中$M_{m,p}$是一个常数。

利用习题3.5.1，E_m可以连续地扩张到$W^{m,p}(\mathbf{R}^n_+)$上去，使$\mathbf{R}^n_+$成为可扩张的。

例3.5.8 若Ω是有界开区域，具有一致C^m光滑的边界，则Ω也是可扩张的。

证 参看 Adams，《Sobolev spaces》定理4.26。

更一般的结果参看 E.M.Stein，《Singular integrals and differentiafility properties of functions》p.189。

定理3.5.9(Соболев **嵌入定理**) 若$\Omega\subset\mathbf{R}^n$是一个可扩张的区域，$m>n/2$，则$W^{m,2}(\Omega)$可以连续地嵌入$C(\overline{\Omega})$。

证 (1) 我们已经知道(习题3.4.1)

$$\|u\|_m'=\left(\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^m|\hat{u}(\xi)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

是$W^{m,2}(\mathbf{R}^n)$的一个等价模。又因为$L^1(\mathbf{R}^n)$函数的Fourier(逆)变换是连续函数，并且

$$\|u\|_{C(R^n)}\leqslant\int_{R^n}|\hat{u}(\xi)|d\xi.$$

而当 $m>n/2$ 时，

$$\int_{R^n}|\hat{u}(\xi)|d\xi$$

$$\leqslant\left(\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^m|\hat{u}(\xi)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{R^n}\frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant c_{n,m}\|u\|_m^{\prime}.$$

所以 $i:u\mapsto u$ 是 $W^{m,2}(\mathbb{R}^n)\to C(\mathbb{R}^n)$的一个连续嵌入。

(2) 今设 $u\in W^{m,2}(\Omega)$，利用延拓算子 T，我们有

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})}\leqslant\|Tu\|_{C(R^n)}\leqslant c_{n,m}\|Tu\|_m^{\prime}$$
$$\leqslant c\|u\|_{W^{m,2}(\Omega)},$$

即 $i:u\mapsto u$ 是 $W^{m,2}(\Omega)\to C(\bar{\Omega})$的连续嵌入。

注 更一般的嵌入定理，不必限制 $p=2$ 是属于 Соболев 的。正是

$$W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)\quad\left(\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{m}{n}\right)\left(\text{当 } m\leqslant\frac{n}{p}\right),$$

$$W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow C(\bar{\Omega})\qquad\left(\text{当 } m>\frac{n}{p}\right),$$

其中$\hookrightarrow$表示连续嵌入。

定理3.5.10(Rellich) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个有界可扩张区域，则 $W_2^1(\Omega)$中的单位球在 $L^2(\Omega)$中是列紧的。

证 要证：由 $\{u_m\}_1^\infty\subset W_2^1(\Omega)$，$\|u_m\|_{W_2^1}\leqslant 1$，可抽出子列 $u_{m'}$，使得 $u_{m'}$ 在 $L^2(\Omega)$中收敛。为此记 $U_m=Tu_m$，其中 T 是扩张算子，并且由习题3.5.2，不妨设 U_m 在公共的、在 $\mathbb{R}^n$ 中紧的集合K外为 0 。我们要证

$$\|u_{p'}-u_{m'}\|_{L^2(\Omega)}\to 0\qquad(\text{当 } m',p'\to\infty).$$

注意到 $$\|u_{p'}-u_{m'}\|_{L^2(\Omega)}^2\leqslant C\|U_{p'}-U_{m'}\|_{L^2(R^n)}^2$$
$$=C\int_{R^n}|\hat{U}_{p'}(\xi)-\hat{U}_{m'}(\xi)|^2d\xi,$$

而
$$\hat{U}_m(\xi)=\int_K U_m(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx$$
$$=\langle e^{-2\pi i x\cdot\xi}a_K, U_m\rangle, \qquad (3.5.7)$$
其中
$$a_K(x)=\begin{cases}1 & (x\in K),\\ 0 & (x\overline{\in}K).\end{cases}$$
由于$\|U_m\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}\leqslant C$以及$a_K e^{-2\pi i x\cdot\xi}\in L^2(\mathbf{R}^n)$，再根据 Hilbert 空间$L^2(\mathbf{R}^n)$的自反性和 Eberlein-Шмулян 定理，有子列$\{m'\}$，使得$U_{m'}$弱收敛。从而(3.5.7)蕴含了对$\forall\xi\in\mathbf{R}^n$，$\hat{U}_{m'}(\xi)$收敛。又
$$|\hat{U}_m(\xi)|\leqslant\left(\int_K dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_K|U_m(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant[\operatorname{mes}(K)]^{\frac{1}{2}}\|U_m\|_{L^2}\leqslant\text{const}.$$
这对$\forall r>0$，
$$\int_{\mathbf{R}^n}|\hat{U}_{m'}(\xi)-\hat{U}_{p'}(\xi)|^2d\xi=\int_{|\xi|<r}+\int_{|\xi|\geqslant r}=\mathrm{I}+\mathrm{II}.$$
然而
$$\mathrm{II}\leqslant r^{-2}\int_{|\xi|\geqslant r}(1+|\xi|^2)|\hat{U}_{m'}(\xi)-\hat{U}_{p'}(\xi)|^2d\xi$$
$$\leqslant 2r^{-2}\int_{|\xi|\geqslant r}(1+|\xi|^2)(|\hat{U}_{m'}(\xi)|^2+|\hat{U}_{p'}(\xi)|^2)d\xi$$
$$\leqslant 2r^{-2}(\|U_{m'}\|_1'^2+\|U_{p'}\|_2'^2)\leqslant Mr^{-2},$$
其中M是一个仅依赖于扩张算子T的常数。

$\forall\varepsilon>0$，取r足够大，使$Mr^{-2}<\varepsilon/2$，固定r，根据 Lebesgue 控制收敛定理，当m',p'足够大时，
$$\mathrm{I}=\int_{|\xi|<r}|\hat{U}_{m'}(\xi)-\hat{U}_{p'}(\xi)|^2d\xi<\frac{\varepsilon}{2}.$$
即得
$$\|u_{m'}-u_{p'}\|_{L^2(\Omega)}\to 0\quad(\text{当 } m',p'\to\infty).$$

推论3.5.11 若$\Omega\subset\mathbf{R}^n$是任意的有界开集，则$W_0^{1,2}(\Omega)$的单位球在$L^2(\Omega)$中是列紧的

证 与定理3.5.10的证明相似.

注1 $W_0^{1,2}(\Omega)$有时记作$\mathring{W}_2^1(\Omega)$，根据定理3.5.5，它也就是例1.6.16中的$H_0^1(\Omega)$.

注2 更一般的结论是属于Контрашев的，参看Adams:《sobolev spaces》定理6.2.

注意到

$$\mathscr{D}(\Omega)\hookrightarrow H_0^m(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega),$$

可见它们的共轭空间之间有如下联系:

$$L^2(\Omega)\hookrightarrow H_0^m(\Omega)^*\hookrightarrow \mathscr{D}'(\Omega).$$

这表明Соболев空间的共轭空间$H_0^m(\Omega)^*$是由比$L^2(\Omega)$函数更多的广义函数组成的. 以下将$H_0^m(\Omega)^*$记作$H^{-m}(\Omega)$，并用积分形式把其中的元素表示出来.

定理3.5.12 为了$f\in H^{-m}(\Omega)$，必须且仅须$\exists g_\alpha\in L^2(\Omega)$ $(|\alpha|\leqslant m)$，使得

$$\langle f,\varphi\rangle=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega g_\alpha(x)\partial^\alpha\varphi(x)dx \quad (\forall\varphi\in H_0^m(\Omega)).$$

证 充分性显然，只须证必要性. 设$f\in H^{-m}(\Omega)$，因为$H_0^m(\Omega)$是实Hilbert空间，应用Riesz定理，f对应着一个$h\in H_0^m(\Omega)$，使得

$$\begin{aligned}\langle f,\varphi\rangle=(\varphi,h)_m&=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega \overline{\tilde{\partial}^\alpha h(x)}\cdot\tilde{\partial}^\alpha\varphi(x)dx\\&=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega g_\alpha(x)\tilde{\partial}^\alpha\varphi(x)dx \qquad (\forall\varphi\in H_0^m(\Omega)),\end{aligned} \tag{3.5.8}$$

其中$g_\alpha(x)\triangleq\overline{\tilde{\partial}^\alpha h(x)}\in L^2(\Omega)$.

推论3.5.13 每个$f\in H^{-m}(\Omega)$是$L^2(\Omega)$函数的广义微商之有限和:

$$f=(-1)^{|\alpha|}\sum_{|\alpha|\leqslant m}\tilde{\partial}^\alpha g_\alpha \qquad (g_\alpha\in L^2(\Omega)). \tag{3.5.9}$$

证 根据广义微商定义，(3.5.8)蕴含(3.5.9).

注1 如果先给定 $g_\alpha \in L^2(\Omega)$，那末由(3.5.9)定义一个 $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$，注意此 f 在 $H^m(\Omega)$ 上的连续延拓可能不是唯一的。但是此 f 在 $H_0^m(\Omega)$ 上的连续延拓却是唯一的，这是因为 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H_0^m(\Omega)$ 中稠密(定理3.5.3)，并且 $\forall\, |\alpha| \leqslant m$ 有

$$|\langle \partial^\alpha g_\alpha, \varphi \rangle| \leqslant \|g_\alpha\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{H_0^m(\Omega)} \quad (\forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)).$$

因此，(3.5.9) 给出了属于 $H^{-m}(\Omega)$ 的广义函数的特征。

注2 根据嵌入定理3.5.9，当 $m > n/2$ 时，$H_0^m(\Omega)$ 可以连续地嵌入 $C(\bar{\Omega})$；因此当 $m > n/2$ 时，$C(\bar{\Omega})$ 上的线性连续泛函属于 $H^{-m}(\Omega)$。特别是 δ 函数属于 $H^{-m}(\Omega)$。例如当 $n = 1$ 时，设 $x_0 \in \Omega \triangleq (a, b)$，则

$$\varphi \mapsto \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$$

在 $C(\bar{\Omega})$ 上是线性连续的；从而 $\delta_{x_0} \in H^{-1}(\Omega)$。

习 题

3.5.1 就 $\Omega = \mathbf{R}_+^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_n > 0\}$ 的情形验证定理3.5.5。

提示 $\forall\, u(x) \in W^{m,p}(\Omega), \forall\, \varepsilon > 0$，请考虑 $u_\varepsilon(x) = u(x', x_n + \varepsilon)$，其中 $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$，$x_n > -\varepsilon$。

3.5.2 若 $\alpha \in \mathscr{D}$，$u \in W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$，则 $\alpha \cdot u \in W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$；并且有常数$C$(依赖于 α)，使得

$$\|\alpha \cdot u\|_{W^{m,p}} \leqslant C \|u\|_{W^{m,p}}.$$

3.5.3 若 $m \geqslant l$，求证：$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,p}(\Omega)$。

3.5.4 设 $\Omega = (a, b), \forall\, f \in L^2(\Omega)$，求证：$\exists !\, x \in H_0^2(\Omega)$，使得

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f,$$

并且 $T: f \mapsto x$ 是 $L^2(\Omega)$ 到 $H_0^2(\Omega)$ 的线性连续算子。

3.5.5 设 $f(x) \in H_0^1(-1, 1)$，求证：

(1) $f(-1)=f(1)=0$;

(2) $f(x)$绝对连续;

(3) $f'(x)\in L^2(-1,1)$ (这里"$'$"指的是求p.p.微商)。

3.5.6 设$f\in H^s(\mathbf{R}^n)$(定义见习题3.4.2),求证:当$s>n/2$时,

(1) $\hat{f}(\xi)\in L^1(\mathbf{R}^n)$;

(2) $f(x)$与一个$\mathbf{R}^n$上的连续有界函数几乎处处相等。

3.5.7 设$m\in\mathbf{N}$,又设

$$H^{-m}\triangleq\{f\in\mathscr{S}' \mid (1+|\xi|^2)^{-\frac{m}{2}}\hat{f}(\xi)\in L^2(\mathbf{R}^n)\},$$

在H^{-m}中定义范数

$$\|f\|_{-m}=\left\|(1+|\xi|^2)^{-\frac{m}{2}}\hat{f}(\xi)\right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \qquad (\forall f\in H^{-m}),$$

求证:若$f\in H^{-m}$,则它可以表为有限个$L^2(\mathbf{R}^n)$函数的导数之和。

提示

$$(1+|\xi|^2)^{-\frac{m}{2}}\hat{f}(\xi)\in L^2(\mathbf{R}^n)$$

$$\Longleftrightarrow\frac{\hat{f}(\xi)}{1+|\xi_1|^m+\cdots+|\xi_n|^m}\in L^2(\mathbf{R}^n).$$

第四章　紧算子与 Fredholm 算子

在无穷维 Banach 空间中有一类特殊的线性算子，它的性质与有限维空间中的矩阵很类似，这就是紧算子。它在积分方程理论和各种数学物理问题的研究中起着核心的作用。

关于线性代数方程的可解性结果可以推广到含紧算子的线性方程中去，这就是 Riesz–Fredholm 理论。它自然包括了带连续核的线性积分方程的可解性结果。进一步为了解决带奇异核的积分方程的可解性问题，引出 Fredholm 算子的概念。

对于紧算子的特征值问题可以讨论得比较透彻，这个结果通常称为 Riesz–Schauder 理论。

§1　紧算子的定义和基本性质

定义4.1.1　设$\mathscr{X}, \mathscr{Y}$是B空间，设$A: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$线性，称$A$是紧算子，如果$\overline{A(B_1)}$在$\mathscr{Y}$中是紧集，其中$B_1$是$\mathscr{X}$中的单位球。

一切紧算子的集合记作$\mathfrak{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$，当$\mathscr{X}=\mathscr{Y}$时，记作$\mathfrak{C}(\mathscr{X})$。

注1　为了$A \in \mathfrak{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$，必须且仅须："对于$\mathscr{X}$中的任意有界集$B$，$\overline{A(B)}$在$\mathscr{Y}$中是紧集"。

注2　为了$A \in \mathfrak{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$，必须且仅须："对任意有界点列$\{x_n\} \subset \mathscr{X}$，$\{Ax_n\}$中有收敛子列"。

命题4.1.2　关于紧算子有下列简单性质：

(1) $\mathfrak{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) \subset \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$。

证　因为$y \mapsto \|y\|$是连续的，所以若$A \in \mathfrak{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$，则

$$M \triangleq \sup_{x \in B_1} \|Ax\| = \max_{y \in \overline{A(B_1)}} \|y\| < \infty \Rightarrow \|Ax\| \leqslant M\|x\|$$

$(\forall x \in \mathscr{X})$.

(2) 若 $A, B \in \mathfrak{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$，$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$，则

$$\alpha A + \beta B \in \mathfrak{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}).$$

(3) $\mathfrak{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 在 $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 中闭.

证 设 $T_n \in \mathfrak{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})(n=1,2,\cdots)$，且 $\|T_n - T\| \to 0$，要证：$T \in \mathfrak{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$。$\forall \varepsilon > 0$，取 $n \in \mathbb{N}$，使得

$$\|T_n - T\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

对 $\overline{T_n(B_1)}$ 取有穷的 $\varepsilon/2$ 网，设它为 $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$；则

$$\overline{T(B_1)} \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(y_i, \varepsilon);$$

从而 $\overline{T(B_1)}$ 有有穷的 ε 网，即得 $\overline{T(B_1)}$ 紧。

(4) 设 $A \in \mathfrak{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$，又设 $\mathscr{X}_0 \subset \mathscr{X}$ 是一个闭线性子空间，那末 $A_0 \triangleq A|_{\mathscr{X}_0} \in \mathfrak{C}(\mathscr{X}_0, \mathscr{Y})$。

(5) 若 $A \in \mathfrak{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$，则 $R(A)$ 可分。

证 $R(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA(B_1)$，由 $A(B_1)$ 列紧，推出可分。

(6) 若 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$，而 $B \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}, \mathscr{Z})$，并且这两个算子中有一个是紧的，则 $BA \in \mathfrak{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Z})$。

证 因为连续线性算子把有界集映为有界集，把紧集映为紧集。 ∎

与紧性概念密切有关的是全连续概念。

定义4.1.3 称 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 是全连续的，如果

$$x_n \rightharpoonup x\,(\text{弱}) \Rightarrow Ax_n \to Ax\,(\text{强}).$$

命题4.1.4 若 $A \in \mathfrak{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$，则 A 是全连续的；反之，若 $\mathscr{X}$ 是自反的，并且 A 是全连续的，则 $A \in \mathfrak{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$。

证 必要性。设 $x_n \rightharpoonup x$，要证：$Ax_n \to Ax = y$。用反证法，

倘若不然，则$\exists\varepsilon_0>0$，及$\{n_i\}$，使得

$$\|Ax_{n_i}-y\|\geqslant\varepsilon_0.$$

由共鸣定理，$\{x_n\}$有界；又由A紧，从$\{x_{n_i}\}$中又可抽出子列，不妨仍记作$\{x_{n_i}\}$，使得$Ax_{n_i}\to z$。但

$$\langle y^*,Ax_{n_i}-y\rangle=\langle A^*y^*,x_{n_i}-x\rangle\to 0\quad(\forall y^*\in\mathscr{Y}^*),$$

即$Ax_{n_i}\rightharpoonup y$，从而$y=z$，这便导出矛盾。

充分性。利用Eberlein–Шмулян定理(见定理2.5.28)，若$\{x_n\}$有界，则必有子列$x_{n_i}\rightharpoonup x$。由A全连续推得$Ax_{n_i}\to Ax$，故A紧。

定理4.1.5 $T\in\mathfrak{C}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\Longleftrightarrow T^*\in\mathfrak{C}(\mathscr{Y}^*,\mathscr{X}^*)$。

证 必要性。要证：若$y_n^*\in B_1^*$($\mathscr{Y}^*$中的单位球)，则$\{T^*y_n^*\}$中有收敛子列。对$\forall n\in\mathbf{N}$，令

$$\varphi_n(y)\triangleq\langle y_n^*,y\rangle\qquad(\forall y\in\overline{T(B_1)}),$$

显然$\varphi_n\in C(\overline{T(B_1)})(\forall n\in\mathbf{N})$，我们只要证明$\{\varphi_n\}$作为$C(\overline{T(B_1)})$上的函数列有一致收敛的子列就够了。事实上，我们有

$$|\varphi_n(y)|\leqslant\|y_n^*\|\|y\|\leqslant\|T\|\quad(\forall n\in\mathbf{N},\forall y\in\overline{T(B_1)})$$

及
$$|\varphi_n(y)-\varphi_n(z)|\leqslant\|y_n^*\|\|y-z\|\leqslant\|y-z\|$$

$(\forall n\in\mathbf{N},\forall y,z\in\overline{T(B_1)})$；这两个式子分别表明$\{\varphi_n\}$是一致有界和等度连续的。由Arzela–Ascoli定理，$\{\varphi_n\}$中有子列在$C(\overline{T(B_1)})$中收敛，即得$\{T^*y_n^*\}$中有子列收敛。

充分性。用必要性的结论，可见$T^{**}\in\mathfrak{C}(\mathscr{X}^{**},\mathscr{Y}^{**})$，但$T=T^{**}|_{\mathscr{X}}$，直接应用命题4.1.2(4)，即得结论。∎

以下给出紧算子的例。

例4.1.6 设$\Omega\subset R^n$是一个有界闭集，$K\in C(\Omega\times\Omega)$，取$\mathscr{X}=\mathscr{Y}=C(\Omega)$；若令

$$T:\ u\mapsto\int_\Omega K(x,y)u(y)dy\quad(\forall u\in C(\Omega)),$$

则$T\in\mathfrak{C}(\mathscr{X})$。

证 只须证$\overline{T(B_1)}$是紧的，为此用 Arzela-Ascoli 定理。若

$$M\triangleq\max_{x,y\in\Omega}|K(x,y)|,$$

则有$\|Tu\|\leqslant M\|u\|\text{mes}(\Omega)$，又对$\forall\varepsilon>0$，由$K(x,y)$在$\Omega\times\Omega$中的一致连续性，$\exists\delta>0$，使得对$\forall y\in\Omega$，有

$$|K(x,y)-K(x',y)|<\varepsilon\quad(\text{当}|x-x'|<\delta),$$

从而

$$\begin{aligned}&|(Tu)(x)-(Tu)(x')|\\&\leqslant\int_\Omega|K(x,y)-K(x',y)||u(y)|dy\\&\leqslant\varepsilon\|u\|\text{mes}(\Omega)\qquad(\text{当}|x-x'|<\delta).\end{aligned}$$

例4.1.7 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$是一个有界开区域，又设$A\in\mathscr{L}(H_0^1(\Omega))$满足

$$\|Au\|_{H_0^1(\Omega)}\leqslant C\|u\|_{L^2(\Omega)},$$

其中C是一个常数，那末$A\in\mathfrak{C}(H_0^1(\Omega))$。

证 由 Rellich 定理(见定理3.5.10)，ι: $H_0^1(\Omega)\to L^2(\Omega)$是紧嵌入，又$A:L^2(\Omega)\to H_0^1(\Omega)$连续，应用命题 4.1.2(6) 即得结论。

以下讨论紧算子的构造。

定义4.1.8 设$T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，若$\dim R(T)<\infty$，则称$T$是有穷秩算子，一切有穷秩算子的集合记作$F(\mathscr{X},\mathscr{Y})$。显然有

$$F(\mathscr{X},\mathscr{Y})\subset\mathfrak{C}(\mathscr{X},\mathscr{Y}).$$

定义4.1.9 设$f\in\mathscr{X}^*$, $y\in\mathscr{Y}$，用$y\otimes f$表示下列算子：

$$x\mapsto\langle f,x\rangle y\qquad(\forall x\in\mathscr{X}),$$

称它为秩 1 算子。

我们用秩 1 算子表示$F(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，有

定理4.1.10 为了$T\in F(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，必须且仅须：$\exists y_i\in\mathscr{Y}$以及$f_i\in\mathscr{X}^*(i=1,2,\cdots,n)$，使得

$$T=\sum_{i=1}^{n}y_i\otimes f_i.$$

证 充分性是因为 $R(T)=\text{span}\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$。下证必要性。在 $R(T)$ 上取基 $\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，则 $\forall x\in\mathscr{X}$，$\exists|\{l_i(x)\}_{i=1}^{n}$，使得

$$Tx=\sum_{i=1}^{n}l_i(x)y_i.$$

兹证 l_i 是 $\mathscr{X}$ 上的线性连续泛函：

(1) $l_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是线性的，这是由于 T 的线性及 l_i 表示的唯一性；

(2) l_i 是有界的。事实上，注意到 $\|Tx\|$ 及 $\sum_{i=1}^{n}|l_i(x)|$ 都是 $R(T)$ 上的模，而 $\dim R(T)<\infty$，所以它们必须是等价模。于是 $\exists M>0$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}|l_i(x)|\leqslant M\|Tx\|\leqslant M\|T\|\|x\|\quad(\forall x\in\mathscr{X}).$$

因此，$\exists f_i\in\mathscr{X}^*(i=1,2,\cdots,n)$，使得

$$\langle f_i,x\rangle=l_i(x)\quad(\forall x\in\mathscr{X})(i=1,2,\cdots,n).$$

于是有

$$Tx=\sum_{i=1}^{n}y_i\langle f_i,x\rangle=\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\otimes f_i\right)(x)\quad(\forall x\in\mathscr{X}).\ \blacksquare$$

回过来研究 $\mathfrak{C}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 的构造，因为 $\overline{F(\mathscr{X},\mathscr{Y})}\subset\mathfrak{C}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，我们问："$\overline{F(\mathscr{X},\mathscr{Y})}=\mathfrak{C}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 对吗？" 以下不妨设 $\mathscr{Y}=\mathscr{X}$。

(1) 若 $\mathscr{X}$ 是一个 Hilbert 空间，这是对的。事实上，因为 $\forall T\in\mathfrak{C}(\mathscr{X})$，$\overline{T(B_1)}$ 紧，所以对 $\forall\varepsilon>0$ 有有穷的 $\varepsilon/2$ 网 $\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，即

$$\overline{T(B_1)}\subset\bigcup_{i=1}^{n}B\left(y_i,\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

令 $E_\varepsilon = \mathrm{span}\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，并令 P_ε 为 E_ε 上的正交投影，那末 $P_\varepsilon T \in F(\mathscr{X})$，并且 $\forall x \in B_1$，$\exists y_i (1 \leqslant i \leqslant n)$，使得

$$\|Tx - y_i\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

从而 $$\|P_\varepsilon Tx - y_i\| = \|P_\varepsilon (Tx - y_i)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由此推得 $$\|Tx - P_\varepsilon Tx\| < \varepsilon \qquad (\forall x \in B_1),$$

即 $\|T - P_\varepsilon T\| \leqslant \varepsilon$。

(2) 若 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间，利用命题 4.1.2(5)，我们只须限于考虑可分空间就够了。

定义4.1.11 设 $\mathscr{X}$ 是一个可分的 Banach 空间，$\{e_n\}_1^\infty \subset \mathscr{X}$，称为是 $\mathscr{X}$ 的一组 Schauder 基是指：$\forall x \in \mathscr{X}$，存在唯一的一个序列 $\{C_n(x)\}$，使得

$$x = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} C_n(x) e_n \quad (于 \mathscr{X}). \ \blacksquare$$

由于 $\forall n \in \mathbf{N}$，$x \mapsto C_n(x)$ 对应的唯一性，$C_n(x)$ 是 $\mathscr{X}$ 上的线性函数。我们将证：

引理4.1.12 $C_n(x)$ 是 $\mathscr{X}$ 上的连续泛函。

姑且先承认这个结论，等一会再回过来证明这个引理，我们来证明：

定理4.1.13 若可分 B 空间 $\mathscr{X}$ 上有一组 Schauder 基，则

$$\overline{F(\mathscr{X})} = \mathfrak{C}(\mathscr{X}).$$

证 (1) $\forall N \in \mathbf{N}$，令

$$S_N x = \sum_{n=1}^{N} C_n(x) e_n \qquad (\forall x \in \mathscr{X}),$$

令 $R_N = I - S_N$；则由共鸣定理，$\exists M > 0$，使得

$$\|S_N\| \leqslant M, \quad 从而 \quad \|R_N\| \leqslant 1 + M.$$

(2) 若 $T \in \mathfrak{C}(\mathscr{X})$，$\forall \varepsilon > 0$，要找有穷秩算子 T_ε，使得 $\|T -$

$T_\varepsilon\|<\varepsilon$. 因 $\overline{T(B_1)}$紧，存在有穷的 $\varepsilon/[3(M+1)]$网

$$\{y_1,y_2,\cdots,y_m\},$$

即 $\forall x\in B_1$，有 $y_i(1\leqslant i\leqslant m)$，使得

$$\|Tx-y_i\|<\frac{\varepsilon}{3(M+1)}. \tag{4.1.1}$$

又由 Schauder 基的定义，$\exists N\in\mathbf{N}$，使得

$$\|y_j-S_Ny_j\|<\frac{\varepsilon}{3}\quad (j=1,2,\cdots,m). \tag{4.1.2}$$

但因$\|S_N\|\leqslant M$，所以由(4.1.1)有

$$\|S_N(Tx)-S_Ny_i\|<\frac{M}{3(M+1)}\varepsilon. \tag{4.1.3}$$

联合不等式(4.1.1)—(4.1.3) 就有

$$\|Tx-(S_NT)x\|<\varepsilon\qquad(\forall x\in B_1).$$

取 $T_\varepsilon=S_NT$ 即得所求。

引理4.1.12的证明 在$\mathscr{X}$上引入另一个模：

$$[\![x]\!]=\sup_{N\in\mathbf{N}}\|S_Nx\|,$$

其中 $S_N(x)=\sum_{n=1}^{N}C_n(x)e_n(\forall x\in\mathscr{X})$。不难验证$\mathscr{X}$按$[\![\cdot]\!]$是完备的，并且

$$\|x\|=\lim_{N\to\infty}\|S_Nx\|\leqslant[\![x]\!]\quad(\forall x\in\mathscr{X}).$$

由等价范数定理(推论2.3.13)，$\exists M_1>0$，使得

$$[\![x]\!]\leqslant M_1\|x\|\qquad(\forall x\in\mathscr{X}).$$

于是对 $\forall n\in\mathbf{N}$，我们有

$$\|C_n(x)e_n\|=\|S_nx-S_{n-1}x\|\leqslant2[\![x]\!]\leqslant2M_1\|x\|\quad(\forall x\in\mathscr{X}).$$

由此可见，$\forall n\in\mathbf{N}$，

$$|C_n(x)|\leqslant2M_1\|e_n\|^{-1}\|x\|\quad(\forall x\in\mathscr{X}).$$

故 $C_n(x)$是连续的$(n=1,2,\cdots)$。 ∎

Banach 曾提问：是否每个可分的 Banach 空间都具有 Schauder 基(1932)？如果这个结论是对的，那么便能推出 $\overline{F(\mathscr{X})}=$

$\mathfrak{C}(\mathscr{X})$。然而直到1973年，才由Enflo作出否定的回答：存在一个可分的B空间和它上的一个紧算子，这紧算子不能为有穷秩算子所逼近，参看 Per Enflo, A counterexample to the approximation problem in Banach spaces, *Acta Math*. 130(1973), 309-317. 不久，A. M. Davie 给出了一个较简单的证明，参看 Davie, The approximation problem for Banach spaces, *Bull. London Math. Soc*. 5(1973), 261-266.

习　题

4.1.1　设$\mathscr{X}$是一个无穷维B空间，求证：若$A\in\mathfrak{C}(\mathscr{X})$，则$A$没有有界逆。

4.1.2　设$\mathscr{X}$是一个B空间，$A\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$满足$\|Ax\|\geqslant a\|x\|$ $(\forall x\in\mathscr{X})$，其中$a$是正常数。求证：$A\in\mathfrak{C}(\mathscr{X})$的充分且必要条件是$\mathscr{X}$是有穷维的。

4.1.3　设$\mathscr{X},\mathscr{Y}$是B空间，$A\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，$K\in\mathfrak{C}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，如果$R(A)\subset R(K)$，求证：$A\in\mathfrak{C}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$。

4.1.4　设H是 Hilbert 空间，$A:H\to H$是紧算子，又设$x_n\rightharpoonup x_0$，$y_n\rightharpoonup y_0$，求证：

$$(x_n,Ay_n)\to(x_0,Ay_0)\qquad(n\to\infty).$$

4.1.5　设$\mathscr{X},\mathscr{Y}$是B空间，$A\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，如果$R(A)$闭且$\dim R(A)=\infty$，求证：$A\overline{\in}\mathfrak{C}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$。

4.1.6　设$\omega_n\in\mathbb{K}$，$\omega_n\to0(n\to\infty)$，求证：映射

$$T:\{\xi_n\}\mapsto\{\omega_n\xi_n\}\qquad(\forall\{\xi_n\}\in l^p)$$

是$l^p(p\geqslant1)$上的紧算子。

4.1.7　设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$是一个可测集，又设$f$是$\Omega$上的有界可测函数，求证：$F:x(t)\mapsto f(t)x(t)$是$L^2(\Omega)$上的紧算子，当且仅当$f=0$(p.p.于$\Omega$)。

4.1.8　设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$是一个可测集，又设$K\in L^2(\Omega\times\Omega)$，求证：

$$A : u(x) \mapsto \int_{\Omega} K(x,y)u(y)dy \quad (\forall u \in L^2(\Omega))$$

是 $L^2(\Omega)$ 上的紧算子。

4.1.9 设H是 Hilbert 空间，$A \in \mathfrak{C}(H)$，$\{e_n\}$ 是 H的正交规范集，求证：$\lim_{n\to\infty}(Ae_n, e_n) = 0$。

4.1.10 设$\mathscr{X}$是B空间，$A \in \mathfrak{C}(\mathscr{X})$，$\mathscr{X}_0$是$\mathscr{X}$的闭子空间并使得 $A(\mathscr{X}_0) \subset \mathscr{X}_0$。求证：映射

$$T : [x] \mapsto [Ax]$$

是商空间 $\mathscr{X}/\mathscr{X}_0$ 上的紧算子。

4.1.11 设$\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$，$\mathscr{Z}$是B空间，$\mathscr{X} \subset \mathscr{Y} \subset \mathscr{Z}$，如果$\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$的嵌入映射是紧的，$\mathscr{Y} \to \mathscr{Z}$的嵌入映射是连续的，求证：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists c(\varepsilon) > 0$，使得

$$\|x\|_{\mathscr{Y}} \leqslant \varepsilon \|x\|_{\mathscr{X}} + c(\varepsilon)\|x\|_{\mathscr{Z}} \quad (\forall x \in \mathscr{X}).$$

§2 Riesz-Fredholm 理论

本节研究与紧算子有关的算子方程的可解性问题，具体地说，设$\mathscr{X}$是一个B空间，$A \in \mathfrak{C}(\mathscr{X})$，又设$T = I - A$，其中$I$表示恒同算子。我们要问：

$$Tx = y \qquad (4.2.1)$$

对哪些 $y \in \mathscr{X}$ 有解？解的结构如何？

1. 从$\mathscr{X} = \mathbf{R}^n$入手，这是线性代数中早就研究过的。记$T = (t_{ij})_{n\times n}$，$x = \{x_j\}_{j=1}^n$，$y = \{y_i\}_{i=1}^n$。我们知道：为了(4.2.1)有解 x，即

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_j = y_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

必须且仅须

$$y = \sum_{j=1}^{n} x_j T_j, \quad 其中\ T_j = \{t_{ij}\}_{i=1}^n \in \mathbf{R}^n \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

亦即 y 可通过 $T_j(j=1,2,\cdots,n)$ 线性表出。而这又等价于，若 $z\in\mathbf{R}^n$，则

$$z\perp y\Longleftrightarrow z\perp T_j\quad(j=1,2,\cdots,n);$$

即

$$\langle z,y\rangle=0\Longleftrightarrow\sum_{i=1}^{n}t_{ij}z_i=0\quad(j=1,2,\cdots,n)。\quad(4.2.2)$$

结论1 为了 $y\in\mathbf{R}^n$ 使(4.2.1)有解，必须且仅须

$$\langle z,y\rangle=0\quad(\forall z\in\mathbf{R}^n,\text{适合 }T^*z=\theta),$$

其中 T^* 表示 T 的转置。

结论2 关于方程(4.2.1)只有两种可能情形：

(1) 或者 $\forall y\in\mathbf{R}^n$，(4.2.1)总有解，而且是唯一的；

(2) 或者 $Tx=\theta$ 有非零解，这时 $Tx=\theta$ 的非零解的极大线性无关组的个数与 $T^*x=\theta$ 的非零解的极大线性无关组的个数相等。

2. Fredholm 研究过下列积分方程，设 $K\in C([0,1]\times[0,1])$。考察方程：

$$x(t)=\int_0^1K(t,s)x(s)ds+y(t),\qquad(4.2.3)$$

及其共轭方程

$$f(t)=\int_0^1K(s,t)f(s)ds+g(t),\qquad(4.2.4)$$

其中 $x,y,f,g\in L^2[0,1]$。得到如下结论：

结论1 关于方程(4.2.3)只有两种可能情形：

(1) 或者 $\forall y\in L^2[0,1]$，(4.2.3)存在唯一解 $x\in L^2[0,1]$；

(2) 或者当 $y=0$ 时，(4.2.3)有非零解。

结论2 方程(4.2.4)与方程(4.2.3)的情形一样，即当(4.2.3)的第一种可能发生时，(4.2.4)也发生第一种可能性；(4.2.3)发生第二种可能时，(4.2.4)也发生第二种可能性。并且(4.2.3)与(4.2.4)对应的齐次方程的线性无关解的个数是相同的有穷数。

结论3 在第二种可能性下，为了(4.2.3)有解，必须且仅须

$$\int_0^1 f(t)y(t)dt=0$$

($\forall f$,它是(4.2.4)的齐次方程的解)；为了(4.2.4)有解，必须且仅须

$$\int_0^1 g(t)x(t)dt=0$$

($\forall x$,它是(4.2.3)的齐次方程的解)。

3. 比较代数方程组与积分方程，它们的结论竟是惊人地相似，实际上，它们是更为一般的算子方程的普遍结论的特殊情形。我们先引进

记号 $\forall T\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$,记 $R(T)\triangleq T(\mathscr{X})$,以及

$$N(T)\triangleq\{x\in\mathscr{X}\mid Tx=\theta\}.$$

又对任意的 $M\subset\mathscr{X}$,$N\subset\mathscr{X}^*$,记

$$^{\perp}M\triangleq\{f\in\mathscr{X}^*\mid\langle f,x\rangle=0\quad(\forall x\in M)\},$$

$$N^{\perp}\triangleq\{x\in\mathscr{X}\mid\langle f,x\rangle=0\quad(\forall f\in N)\}.$$

又若 $f\in\mathscr{X}^*$,$x\in\mathscr{X}$,满足$\langle f,x\rangle=0$,便简单地记作

$$f\perp x.$$

由这些记号，当 $T=I-A$ 时，其中

$$A:\ x(t)\mapsto\int_0^1 K(t,s)x(s)ds,$$

三个 Fredholm 结论可以用简练的形式表达如下：

结论1 $N(T)=\{\theta\}\Rightarrow R(T)=\mathscr{X}$.

结论2 $\sigma(T)=\sigma(T^*)$,且

$$\dim N(T)=\dim N(T^*)<\infty.$$

结论3 $R(T)=N(T^*)^{\perp}$, $R(T^*)={}^{\perp}N(T)$.

以下我们对一般的 $T=I-A(A\in\mathfrak{C}(\mathscr{X}))$证明上面三个Fredholm 结论。然而,一般地，$\forall T\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$,下列关系是明显的：

$$^{\perp}R(T)\subset N(T^*),\qquad R(T^*)^{\perp}\subset N(T),\qquad(4.2.5)$$

$$\overline{R(T)}\subset N(T^*)^{\perp},\qquad\overline{R(T^*)}\subset{}^{\perp}N(T).\qquad(4.2.6)$$

又 $\forall M, M_1 \subset \mathscr{X}$，$\forall N, N_1 \subset \mathscr{X}^*$，有下列关系：

$$M \subset M_1 \Longrightarrow {}^{\perp}M \supset {}^{\perp}M_1, \qquad (4.2.7)$$

$$N \subset N_1 \Longrightarrow N^{\perp} \supset N_1^{\perp}. \qquad (4.2.8)$$

于是可得

引理4.2.1 若 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$，则

$$\overline{R(T)} = N(T^*)^{\perp}, \qquad \overline{R(T^*)} = {}^{\perp}N(T). \qquad (4.2.9)$$

证 联合(4.2.5)，(4.2.6)及(4.2.8)可见

$$\overline{R(T)} \subset N(T^*)^{\perp} \subset ({}^{\perp}R(T))^{\perp}.$$

只须再证：$({}^{\perp}R(T))^{\perp} \subset \overline{R(T)}$。$\forall x_0 \in ({}^{\perp}R(T))^{\perp}$，要证：$x_0 \in \overline{R(T)}$，根据 Hahn-Banach 定理的推论2.4.8，只要证：

$$f(R(T)) = 0 \quad (\forall f \in \mathscr{X}^*) \Rightarrow f(x_0) = 0,$$

即
$$f \in {}^{\perp}R(T) \Rightarrow f(x_0) = 0.$$

而这正是 $x_0 \in ({}^{\perp}R(T))^{\perp}$ 所蕴含的。

同理可证 $\overline{R(T^*)} = {}^{\perp}N(T)$。 ▌

于是问何时 $R(T) = \overline{R(T)}$？

定义4.2.2 称 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$ 是闭值域算子，是指

$$R(T) = \overline{R(T)}.$$

定理4.2.3 若 $A \in \mathfrak{C}(\mathscr{X})$，则 $T = I - A$ 是闭值域算子。

证 因为 $N(T)$ 是 $\mathscr{X}$ 的闭子空间，考察

$$\tilde{T}: \mathscr{X}/N(T) \to \mathscr{X}, \quad \tilde{T}[x] \triangleq Tx.$$

显然 $R(\tilde{T}) = R(T)$，并且 $\tilde{T}$ 还是线性有界的，满足 $N(\tilde{T}) = \{[\theta]\}$，即 $\tilde{T}$ 的逆算子存在。为了证明 $R(T)$ 闭，只须证 $\tilde{T}^{-1}$ 是连续的。用反证法，倘若 $\tilde{T}^{-1}$ 不连续，那末 $\exists \{[x_n]\}$，使得

$$\|[x_n]\| = 1 \ (n = 1, 2, \cdots), \quad 但 \ \tilde{T}[x_n] \to \theta \quad (n \to \infty).$$

因此对 $\forall n \in \mathbf{N}$，$\exists x_n \in [x_n]$，使得

$$\|x_n\| < 2 \quad (n = 1, 2, \cdots), \quad (I - A)x_n \to \theta \quad (n \to \infty).$$

由 A 紧，有子列 $\{x_{n_k}\}$，使得 $Ax_{n_k} \to z$；从而

$$x_{n_k} = Ax_{n_k} + (I-A)x_{n_k} \to z.$$

于是有 $Tz=\theta$，即得$[z]=[\theta]$。因此

$$\|[x_{n_k}]\| = \|[x_{n_k}-z]\| \leqslant \|x_{n_k}-z\| \to 0.$$

这与$\|[x_{n_k}]\|=1$矛盾。

注 证明中引进的算子$\widetilde{T}$称为T在$\mathscr{X}/N(T)\to R(T)$上诱导出的算子。

联合引理4.2.1与定理4.2.3得到 Fredholm 结论3，即

推论4.2.4 若A紧，则$R(T)=N(T^*)^{\perp}$，$R(T^*)={}^{\perp}N(T)$，其中$T=I-A$。 ▌

现在来证明 Fredholm 结论 2，前一条其实对一般有界线性算子T都对，正是有

定理4.2.5 若$T\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$，则$\sigma(T)=\sigma(T^*)$。

证 只须证：$T^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X})\Longleftrightarrow(T^*)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X}^*)$。

必要性。因为$(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$（见习题2.5.10），所以结论是显然的。

充分性。由必要性的结论推得$(T^{**})^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X}^{**})$；又因$T=T^{**}|_{\mathscr{X}}$，所以$T$是1-1的。并且$R(T)\subset\mathscr{X}$是闭的。将证：$R(T)=\mathscr{X}$。倘若不然，则$\exists f\in\mathscr{X}^*, f\neq\theta$，但

$$f\in{}^{\perp}R(T)\subset N(T^*),$$

从而$T^*f=\theta$，因为T^*可逆，所以$f=\theta$。这是一个矛盾，于是$T^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$。 ▌

至于 Fredholm 结论 2 中的后一条，实际上包含两个内容：

(1) $\dim N(T)<\infty$。这是由$I|_{N(T)}=A|_{N(T)}$是紧算子导出的（参看习题4.1.1）。

(2) $\dim N(T)=\dim N(T^*)$。实际上，这条联同 Fredholm 结论 3，可以导出结论 1。这是因为

$$N(T)=\{\theta\}\Rightarrow\dim N(T^*)=\dim N(T)=0$$
$$\Rightarrow N(T^*)=\{\theta\}\Rightarrow R(T)=N(T^*)^{\perp}=\mathscr{X}.$$

然而，直接证明 $\dim N(T)=\dim N(T^*)$ 并不容易，我们宁可先去证 Fredholm 结论 1 即，$\dim N(T)=0$ 的情形的结论，亦即

定理4.2.6 若 $A\in \mathfrak{C}(\mathscr{X})$，$T=I-A$，且 $N(T)=\{\theta\}$；则 $R(T)=\mathscr{X}$。

证 用反证法。倘若不然，作 $\mathscr{X}_0=\mathscr{X}$，$\mathscr{X}_k=T(\mathscr{X}_{k-1})$ $(k=1,2,\cdots)$，那末因为 $\mathscr{X}_1\neq\mathscr{X}_0$，且 T 是 1-1 的，可见

$$\mathscr{X}_0\supsetneqq\mathscr{X}_1\supsetneqq\mathscr{X}_2\supsetneqq\cdots.$$

用 Riesz 引理1.4.31，$\exists\, y_k\in\mathscr{X}_k$，$\|y_k\|=1$，但

$$\text{dist}(y_k,\mathscr{X}_{k+1})\geqslant\frac{1}{2}\quad(k=0,1,2,\cdots).$$

于是对 $\forall\, p,n\in\mathbf{N}$，我们有

$$\|Ay_n-Ay_{n+p}\|=\|y_n-Ty_n+Ty_{n+p}-y_{n+p}\|\geqslant\frac{1}{2},$$

这是因为

$$Ty_n-Ty_{n+p}+y_{n+p}\in\mathscr{X}_{n+1}.$$

从而与 A 的紧性矛盾。❙

为了回过来证 Fredholm 结论 2 的后一条(2)，即

$$\dim N(T)=\dim N(T^*).\qquad(4.2.10)$$

我们要引进

定义4.2.7 设 $M\subset\mathscr{X}$ 是一个闭线性子空间，称

$$\text{codim}\, M\triangleq\dim(\mathscr{X}/M)$$

为 M 的余维数。

引理4.2.8 设 $M\subset\mathscr{X}$ 是一个闭线性子空间，那末

$$(\mathscr{X}/M)^*\cong{}^{\perp}M.\qquad(4.2.11)$$

证 $\forall\, f\in{}^{\perp}M$，因为

$$\langle f,x_1\rangle=\langle f,x_2\rangle\quad(\forall\, x_1,x_2\in\mathscr{X},\ x_1-x_2\in M),$$

所以 f 诱导出 $\mathscr{X}/M$ 上的线性泛函 Tf，

$$\langle Tf,[x]\rangle\triangleq\langle f,x\rangle\quad(\forall\, x\in[x])(\forall\,[x]\in\mathscr{X}/M);\qquad(4.2.12)$$

并由此得出

$$|\langle Tf,[x]\rangle|\leqslant\|f\|\|x\| \quad (\forall x\in[x])(\forall [x]\in\mathscr{X}/M).$$

从而 $$|\langle Tf,[x]\rangle|\leqslant\|f\|\inf_{x\in[x]}\{\|x\|\}$$
$$=\|f\|\|[x]\| \quad (\forall [x]\in\mathscr{X}/M),$$

即 $Tf\in(\mathscr{X}/M)^*$，且 $\|Tf\|\leqslant\|f\|$。

反之，$\forall \tilde{f}\in(\mathscr{X}/M)^*$，作 f 如下：

$$\langle f,x\rangle\triangleq\langle\tilde{f},[x]\rangle \quad (\forall x\in\mathscr{X}), \qquad (4.2.13)$$

其中$[x]$是含 x 的商类($\mathscr{X}$对M)。由(4.1.13)，我们有

$$|\langle f,x\rangle|\leqslant\|\tilde{f}\|\|[x]\|\leqslant\|\tilde{f}\|\|x\| \quad (\forall x\in\mathscr{X}),$$

由此可见 $f\in\mathscr{X}^*$，且$\|f\|\leqslant\|\tilde{f}\|$。还由(4.2.13)，易见 $f\in{}^{\perp}M$；又比较(4.2.12)与(4.2.13)即可推出 $Tf=\tilde{f}$。

综合上述两方面，我们证明了映射

$$T:\ {}^{\perp}M\to(\mathscr{X}/M)^*$$

是线性等距满射，即得(4.2.11)。

引理4.2.9 若 $A\in\mathfrak{C}(\mathscr{X})$，$T=I-A$，则

$$\mathrm{codim}\,R(T)\leqslant\dim N(T).$$

证 用反证法。倘若 $\mathrm{codim}\,R(T)>\dim N(T)$，那末必有$\mathscr{X}/R(T)$的真线性子空间 M_1，使得

$$\dim M_1=\dim N(T);$$

因此存在等距线性同构 $V:\ N(T)\to M_1$。记 T_1 为 T 在$\mathscr{X}/N(T)\to R(T)$上诱导出的算子，并令

$$\tilde{T}\triangleq T_1\oplus V:\mathscr{X}\to R(T)\oplus M_1;$$

那末 $N(\tilde{T})=\{\theta\}$，并且 $\tilde{T}$ 也呈"I－紧算子"的形式，由定理4.2.6，便得 $R(\tilde{T})=\mathscr{X}$，即 $M_1\oplus R(T)=\mathscr{X}$，这与 M_1 是$\mathscr{X}/R(T)$的真子空间矛盾。∎

利用这两个引理，我们给出：

(4.2.10)的证明 由引理4.2.9以及推论4.2.4(Fredholm 结论 3)，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{codim} R(T) &\triangleq \dim(\mathscr{X}/R(T)) = \dim((\mathscr{X}/R(T))^*) \\ &= \dim({}^{\perp}R(T)) = \dim({}^{\perp}(N(T^*)^{\perp})) \\ &\geqslant \dim N(T^*). \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

同理， $$\operatorname{codim} R(T^*) \geqslant \dim N(T^{**}) \geqslant \dim N(T). \tag{4.2.15}$$

联合(4.2.14)，(4.2.15)，并利用引理4.2.9及定理4.1.5即得

$$\begin{aligned}\dim N(T^*) &\leqslant \operatorname{codim} R(T) \leqslant \dim N(T) \\ &\leqslant \operatorname{codim} R(T^*) \leqslant \dim N(T^*). \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

(4.2.16)本身蕴含它的一切不等式均为等式，于是得(4.2.10)。

总结起来，有

定理4.2.10 若 $A \in \mathfrak{C}(\mathscr{X})$，且 $T = I - A$；则

(1) $N(T) = \{\theta\}$，$R(T) = \mathscr{X}$；

(2) $\sigma(T) = \sigma(T^*)$；

(3) $\dim N(T) = \dim N(T^*) < \infty$；

(4) $R(T) = N(T^*)^{\perp}, R(T^*) = {}^{\perp}N(T)$；

以及更一般的，

(5) $\operatorname{codim} R(T) = \dim N(T)$。

习　　题

4.2.1　设 $\mathscr{X}$ 是 B 空间，$M \subset \mathscr{X}$ 是一个闭线性子空间，$\operatorname{codim} M = n$，求证：存在线性无关集 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathscr{X}^*$，使得

$$M = \bigcap_{k=1}^{n} N(\varphi_k).$$

4.2.2　设 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 是两个 B 空间，$T \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 是满射的。定义 $\tilde{T}$：$\mathscr{X}/N(T) \to \mathscr{Y}$ 如下：

$$\tilde{T}[x] = Tx \quad (\forall x \in [x])(\forall [x] \in \mathscr{X}/N(T))；$$

求证：$\tilde{T}$ 是线性同胚映射。

4.2.3　设 $\mathscr{X}$ 是 B 空间，M, N_1, N_2 都是 $\mathscr{X}$ 的闭线性子空间，如果

$$M \oplus N_1 = \mathscr{X} = M \oplus N_2,$$

求证：N_1 和 N_2 同胚。

提示 只要证明 N_1, N_2 都与 $\mathscr{X}/M$ 同胚。

4.2.4 设 $A \in \mathfrak{C}(\mathscr{X}), T = I - A$，求证：

(1) $\forall [x] \in \mathscr{X}/N(T), \exists x_0 \in [x]$，使得 $\|x_0\| = \|[x]\|$；

(2) 若 $y \in \mathscr{X}$，使方程 $Tx = y$ 有解，则其中必有一个解达到范数最小。

4.2.5 设 $A \in \mathfrak{C}(\mathscr{X})$，且 $T = I - A$，$\forall k \in \mathbf{N}$，求证：

(1) $N(T^k)$ 是有穷维的；

(2) $R(T^k)$ 是闭的。

4.2.6 设 M 是 B 空间 $\mathscr{X}$ 的闭线性子空间，称满足 $P^2 = P$（幂等性）的由 $\mathscr{X}$ 到 M 上的一个有界线性算子 P 为由 $\mathscr{X}$ 到 M 上的投影算子。求证：

(1) 若 M 是 $\mathscr{X}$ 的有穷维线性子空间，则必存在由 $\mathscr{X}$ 到 M 上的投影算子；

(2) 若 P 是由 $\mathscr{X}$ 到 M 上的投影算子，则 $I - P$ 是由 $\mathscr{X}$ 到 $R(I - P)$ 上的投影算子；

(3) 若 P 是由 $\mathscr{X}$ 到 M 上的投影算子，则 $\mathscr{X} = M \oplus N$，其中 $N = R(I - P)$；

(4) 若 $A \in \mathfrak{C}(\mathscr{X})$，且 $T = I - A$，则在代数与拓扑同构意义下，

$$N(T) \oplus \mathscr{X}/N(T) = \mathscr{X} = R(T) \oplus \mathscr{X}/R(T).$$

§3 紧算子的谱理论

(Riesz-Schauder 理论)

这一节研究三个问题：

1. 紧算子的谱的分布；
2. 不变子空间；
3. 紧算子的构造。

对应到矩阵，每个问题都有清楚的答案：1.矩阵有特征值，

其个数≤空间的维数；2.存在着真不变子空间；3.利用一列不变子空间，可将矩阵化为Jordan标准形。

回顾第二章§6，这些问题是算子谱论的中心问题。正如该节各例所示，一般有界线性算子的谱集很复杂，这些问题的答案是不完全的或不甚清楚的。然而对于紧算子，在本节中，我们将进行详尽的讨论，并得到满意的结果。

3.1 紧算子的谱

现在考察问题1，我们有

定理4.3.1 若 $A\in\mathfrak{C}(\mathscr{X})$，则

(1) $0\in\sigma(A)$，除非 $\dim\mathscr{X}<\infty$；

(2) $\sigma(A)\backslash\{0\}=\sigma_p(A)\backslash\{0\}$；

(3) $\sigma_p(A)$至多以0为聚点。

证 (1) 是习题4.1.1。(2) 是Fredholm结论1。只须证(3)。用反证法，倘若有 $\lambda_n\in\sigma_p(A)\backslash\{0\}(n=1,2,\cdots)$，$\lambda_n\neq\lambda_m$（当$n\neq m$），并且 $\lambda_n\to\lambda\neq 0(n\to\infty)$；那末

$$\exists\, x_n\in N(\lambda_n I-A)\backslash\{\theta\}(n=1,2,\cdots).$$

我们有：

1°$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是线性无关的。事实上，可用数学归纳法证明，设此结论对 n 已成立。若有

$$x_{n+1}\in N(\lambda_{n+1}I-A)\backslash\{\theta\},$$

使得 $x_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$，则有

$$\lambda_{n+1}x_{n+1}=Ax_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i x_i,$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\lambda_{n+1}-\lambda_i)x_i=\theta.$$

由归纳法假设$\{x_1,\cdots,x_n\}$是线性无关的，所以

$$(\lambda_{n+1}-\lambda_i)\alpha_i=0\Rightarrow\alpha_i=0\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

这与 $x_{n+1}\neq\theta$ 矛盾。因此$\{x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}\}$是线性无关的

2° 若令 $E_n=\text{span}\{x_1,\cdots,x_n\}$，则 $E_n\subsetneqq E_{n+1}$，应用 Riesz 引理，

$$\exists y_{n+1}\in E_{n+1},\ 使得\|y_{n+1}\|=1,\quad 且\ \text{dist}(y_{n+1},E_n)\geqslant\frac{1}{2}.$$

从而对 $\forall n,p\in\mathbf{N}$，有

$$\left\|\frac{1}{\lambda_{n+p}}Ay_{n+p}-\frac{1}{\lambda_n}Ay_n\right\|$$

$$=\left\|y_{n+p}-\left(y_{n+p}-\frac{1}{\lambda_{n+p}}Ay_{n+p}+\frac{1}{\lambda_n}Ay_n\right)\right\|\geqslant\frac{1}{2},$$

这是因为

$$y_{n+p}-\frac{1}{\lambda_{n+p}}Ay_{n+p}+\frac{1}{\lambda_n}Ay_n\in E_{n+p-1}.$$

这便与 A 的紧性矛盾。

注 本定理表明：对于无穷维空间上的紧算子 A，只有三种可能情形：

(1) $\sigma(A)=\{0\}$；

(2) $\sigma(A)=\{0,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$；

(3) $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots,0\}$，其中 $\lambda_n\to 0$。

试举例说明：这三种情形都可能发生。

3.2 不变子空间

现在转向问题 2。

定义4.3.2 设 $\mathscr{X}$ 是一个 B 空间，$M\subset\mathscr{X}$ 称为是算子 $A\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 的不变子空间，是指 $A(M)\subset M$。

由定义可见：

命题4.3.3 设 $\mathscr{X}$ 是一个 B 空间，$A\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$，那末

(1) $\{\theta\}$，$\mathscr{X}$ 都是 A 的不变子空间；

(2) 若 M 是 A 的不变子空间，则 $\overline{M}$ 也是 A 的不变子空间；

(3) 若 $\lambda\in\sigma_p(A)$，即 λ 是 A 的本征值，则 $N(\lambda I-A)$ 是 A 的不变子空间；

(4) $\forall y\in\mathscr{X}$,若记 $L_y\triangleq\{P(A)y|P$ 是任意多项式$\}$，则 L_y 是A的不变子空间。 ▌

当 $\dim\mathscr{X}=\infty$时，$\forall A\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$，问是否一定存在着$A$的一个非平凡的闭不变子空间(所谓平凡是指：$M=\{\theta\}$或$\mathscr{X}$)？这是一个长期未解决的根本性问题。直至1984年才由 C.J.Read 举出反例，表明存在一个无穷维的 Banach 空间$\mathscr{X}$及一个线性算子 $A\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$，使$A$没有非平凡的不变子空间(*Bull.London.Math.Soc*.16(1984)337—401)。现在，还剩下的问题是：若$\mathscr{X}$是 Hilbert 空间，$\dim\mathscr{X}=\infty$，对$\forall A\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$,是否存在着$A$的非平凡的闭不变子空间？然而对于紧算子，有

定理4.3.4 若 $\dim\mathscr{X}\geqslant 2$，则$\forall A\in\mathfrak{C}(\mathscr{X})$,$A$必有非平凡的闭不变子空间。

证 我们不妨设 $\dim\mathscr{X}=\infty$，$A\neq 0$，并且 $\sigma_p(A)\backslash\{0\}=\varnothing$。于是由定理4.3.1(2)，有 $\sigma(A)=\{0\}$。倘若A没有非平凡的闭不变子空间，则$\forall y\in\mathscr{X}\backslash\{\theta\}$，命题4.3.3(4)中定义的 L_y 蕴含

$$L_y=\mathscr{X}.$$

不妨设$\|A\|=1$,那末$\exists x_0\in\mathscr{X}$使得$\|Ax_0\|>1$。于是$\|x_0\|>1$，取 $C\triangleq\overline{AB(x_0,1)}$，便有$C$是紧集，并且

$$\theta\overline{\in}C\cap B(x_0,1).$$

如今，$\forall y_0\in C$，存在多项式 $T_{y_0}=P(A)$，使得

$$\|T_{y_0}y_0-x_0\|<1,$$

从而有 $\delta_{y_0}>0$，使得

$$\|T_{y_0}y-x_0\|<1\quad(\forall y\in B(y_0,\delta_{y_0})).$$

由于C是紧的，有有穷覆盖

$$\bigcup_{i=1}^{n}B(y_i,\delta_i)\supset C,$$

其中 $\delta_i\triangleq\delta_{y_i}(i=1,2,\cdots,n)$。从而$\forall y\in C$，$\exists i_1(1\leqslant i_1\leqslant n)$,使得

$$\|T_{i_1}y-x_0\|<1,\tag{4.3.1}$$

这里和以下我们都记 $T_i \triangleq T_{y_i}(i=1,2,\cdots,n)$。

但因(4.3.1)蕴含 $T_{i_1}y \in B(x_0,1)$，所以 $AT_{i_1}y \in C$，又 $\exists\, i_2$ $(1 \leqslant i_2 \leqslant n)$，使得

$$\|T_{i_2}AT_{i_1}y - x_0\| < 1.$$

注意到 T_{i_1}是与 A 可交换的多项式，便得

$$\|T_{i_2}T_{i_1}Ay - x_0\| < 1.$$

如此继续下去，$\exists\, i_1,\cdots,i_k,\cdots$，使得

$$\left\|\prod_{j=1}^{k+1} T_{i_j}(A^k y) - x_0\right\| < 1,$$

或者
$$\left\|\left(\prod_{j=1}^{k+1} T_{i_j}\right)(A^k y)\right\| > \|x_0\| - 1.$$

设 $\mu = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \|T_i\|$，便得

$$\|x_0\| - 1 \leqslant \mu^{k+1}\|A^k y\| \quad (\mu > 0, k \in \mathbf{N}).$$

因此，

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{\|x_0\|-1}{\mu\|y\|}\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant \left(\frac{\|A^k y\|}{\|y\|}\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant \|A^k\|^{\frac{1}{k}}; \qquad (4.3.2)$$

当 $k \to \infty$时，(4.3.2)左端极限是 $1/\mu$，而右端极限是0(定理2.6.12)，这便导出了矛盾。

3.3 紧算子的结构

最后，我们再来研究紧算子的结构，回忆矩阵分解为 Jordan 标准形的过程、步骤如下：

(1) 在有穷维向量空间 V 上，称 T 是一个幂 0 阵，是 $\exists$ 正整数 q，使得 $T^q = 0$，记使 $T^q = 0$的最小的 q 为这矩阵 T 的指标。对于幂 0 阵，有如下结论：$\exists$ 正整数 r，

$$q_1 \leqslant q_2 \leqslant \cdots \leqslant q_r \leqslant q \quad (q_i \in \mathbf{N}, i = 1,2,\cdots,r),$$

以及 $x_1, x_2, \cdots, x_r \in V$，使得

$$\begin{matrix} \{x_1, & Tx_1, & \cdots, & T^{q_1-1}x_1; \\ x_2, & Tx_2, & \cdots, & T^{q_2-1}x_2; \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_r, & Tx_r, & \cdots, & T^{q_r-1}x_r\} \end{matrix}$$

构成V的基，并且$T^{q_1}x_1 = \cdots = T^{q_r}x_r = \theta$。于是在$V$上，幂0阵分解为$q_1 + \cdots + q_r$个Jordan块，其对角线为0。

(2) 为了从给定的V上的矩阵A构造出与之有关的幂0阵，设λ是A的一个本征值。在每个$N((\lambda I - A)^j)(j=1,2,\cdots)$上，$\lambda I - A$都是幂0的，并且$N((\lambda I - A)^j)$还是$A$的不变子空间。由于空间$V$是有穷维的，必有$p \in \mathbf{N}$使得

$$N((\lambda I - A)^p) = N((\lambda I - A)^{p+1}) = \cdots.$$

其关键的步骤是，能证明$V = N((\lambda I - A)^p) \oplus V_1$，其中$V_1$是$V$的一个线性子空间，满足：$\lambda I - A|_{V_1}$是可逆的，特别地，$V_1 = R((\lambda I - V)^p)$。

有了这个结论，我们便可以从A的所有本征值$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$找到对应的$p_1, \cdots, p_k$将空间$V$分解为$\bigoplus\limits_{i=1}^{k} N((\lambda_i I - A)^{p_i})$，因为每个$N((\lambda_i I - A)^{p_i})$都是$A$的不变子空间，而

$$\lambda_i I - A|_{N((\lambda_i I - A)^{p_i})} \quad (i = 1,2,\cdots,k)$$

是幂0阵。我们就得到A的Jordan分解。

现在我们来把这些步骤推广到紧算子。设$A \in \mathfrak{C}(\mathscr{X})$，$T = I - A$，我们要证：

定理4.3.5 存在非负整数p，使得$\mathscr{X} = N(T^p) \oplus R(T^p)$，并且$T_1 \triangleq T|_{R(T^p)}$有线性有界逆算子。

为证这个定理，我们先考察任意的$T \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$，大家知道有如下链的包含关系：

$$\{\theta\} \subseteq N(T) \subseteq N(T^2) \subseteq \cdots,$$

而且一旦有$N(T^k) = N(T^{k+1})$，就有$N(T^k) = N(T^n)(\forall n \geqslant k)$。

事实上，

$$x\in N(T^{k+2})\Rightarrow T^{k+1}Tx=\theta$$

$$\Rightarrow Tx\in N(T^{k+1})=N(T^k)\Rightarrow x\in N(T^{k+1}).$$

因此，称此链中使得 $N(T^k)=N(T^{k+1})$ 成立的最小整数 p 为零链长，有时记为 $p(T)$。

同样，我们也有下列链的包含关系：

$$\mathscr{X}\supseteq R(T)\supseteq R(T^2)\supseteq\cdots,$$

而且一旦 $R(T^k)=R(T^{k+1})$，就有 $R(T^k)=R(T^n)(\forall n\geqslant k)$。事实上，若 $x\in R(T^{k+1})$，则 $\exists y\in\mathscr{X}$，使得 $x=T^{k+1}y$，令 $W=T^ky$，便得

$$W\in R(T^k)=R(T^{k+1})\Rightarrow x=TW\in R(T^{k+2}).$$

因此，称此链中使得 $R(T^k)=R(T^{k+1})$ 成立的最小整数 q 为像链长，有时记为 $q(T)$。由定义，我们有

$$p=0\Longleftrightarrow N(T)=\{\theta\}\Longleftrightarrow T\text{ 是单射。}\qquad(4.3.3)$$

$$q=0\Longleftrightarrow R(T)=\mathscr{X}\Longleftrightarrow T\text{ 是满射。}\qquad(4.3.4)$$

问题 p,q 一定有穷吗？p 与 q 有什么关系？

一般来说，p,q 都可能是 ∞，然而有：

引理4.3.6 若 $T=I-A$，$A\in\mathfrak{C}(\mathscr{X})$，则 $p=q<\infty$。

证 (1) $q<\infty$。用反证法。倘若不然，则有：

$$R(T)\supsetneqq R(T^2)\supsetneqq\cdots,$$

注意到，对 $\forall k\in\mathbf{N}$，

$$T^k=I+\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}(-A)^j=I+\text{紧算子},$$

所以 $R(T^k)$ 还是闭线性子空间。应用 Riesz 引理1.4.31，即得矛盾(推理过程与定理4.2.6的证明同样)。

(2) $p\leqslant q$。由定义，$R(T^q)=R(T^{q+1})$，应用定理4.2.10(4)，

$$\dim N(T^q)=\operatorname{codim}R(T^q)=\operatorname{codim}R(T^{q+1})=\dim N(T^{q+1}).$$

于是由 $\dim N(T^q)<\infty$，可见 $N(T^q)=N(T^{q+1})$，再由 p 的定义，即得 $p\leqslant q$。

(3) $q\leqslant p$。同理，由定义 $N(T^p)=N(T^{p+1})$，以及

$$\operatorname{codim}R(T^{p+1})=\dim N(T^{p+1})=\dim N(T^p)=\operatorname{codim}R(T^p).$$

定理4.3.5的证明 (1) $N(T^p)\cap R(T^p)=\{\theta\}$。事实上，若有 $y\in N(T^p)\cap R(T^p)$，则 $\exists x\in\mathscr{X}$，使得 $y=T^px$，且有 $T^py=\theta$，从而

$$x\in N(T^{2p})=N(T^p)\Rightarrow y=T^px=\theta.$$

(2) $\mathscr{X}=N(T^p)\oplus R(T^p)$。事实上，对 $\forall x\in\mathscr{X}$ 有

$$T^px\in R(T^p)=R(T^{2p}),$$

因此 $\exists u\in\mathscr{X}$，使得 $T^{2p}u=T^px$。令 $y\triangleq T^pu\in R(T^p)$，便有 $z\triangleq x-y\in N(T^p)$，这是因为 $T^py=T^px$。于是得

$$x=y+z\quad(y\in R(T^p),z\in N(T^p)).$$

(3) $T_1\triangleq T|_{R(T^p)}$ 有线性有界逆算子。事实上，因为

$$R(T^p)=R(T^{p+1}),$$

可见 T_1 是满射的。又 T_1 是1-1的，这是因为：若 $y\in R(T^p)$，且 $Ty=\theta$，则 $\exists x\in\mathscr{X}$，使得 $y=T^px$，从而

$$x\in N(T^{p+1})=N(T^p),$$

即得 $y=\theta$。于是由逆算子定理即得结论。∎

根据这个定理，对于任意的 $A\in\mathfrak{C}(\mathscr{X})$，从它的一切非0本征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$，我们可以找到对应于 $T_i=\lambda_iI-A$ 的零链长 $p_i(i=1,2,\cdots)$。在空间 $\bigoplus_{i=1}^{\infty}N((\lambda_i-A)^{p_i})$ 上，算子 A 有对应的 Jordan 标准形。

更精细的讨论参看 Ringrose, Non selfadjoint compact operators, *Van Nostrand*(1971)。

习　题

（本节习题中的$\mathscr{X}$均指B空间）

4.3.1　给定数列$\{a_n\}$，在空间l^2上定义算子A如下：

$$A:(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(a_1x_1,a_2x_2,\cdots);$$

(1) 求证：$A\in\mathscr{L}(l^2)$的充要条件是$\exists M>0$，使得$|a_n|\leqslant M$.

(2) 若$A\in\mathscr{L}(l^2)$，求$\sigma(A)$并判别谱点类型。

4.3.2　在$C[0,1]$中，考虑映射

$$T:x(t)\mapsto\int_0^t x(s)ds,\qquad \forall\, x(t)\in C[0,1].$$

(1) 求证：T是紧算子；

(2) 求$\sigma(T)$及T的一个非平凡的闭不变子空间。

4.3.3　设$A\in\mathfrak{C}(\mathscr{X})$，求证：当且仅当$x-Ax=\theta$只有零解时，方程$x-Ax=y$对$\forall\, y\in\mathscr{X}$都有解。

4.3.4　设$T\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$，并存在$m\in\mathbf{N}$，使得

$$\mathscr{X}=N(T^m)\oplus R(T^m),$$

求证：$p(T)=q(T)\leqslant m$.

4.3.5　设A，$B\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$，并且$AB=BA$，求证：

(1) $R(A)$和$N(A)$都是B的不变子空间；

(2) $R(B^n)$和$N(B^n)$都是B的不变子空间（$\forall\, n\in\mathbf{N}$）。

4.3.6　设$A\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$，$M$是$A$的有穷维的闭不变子空间，求证：

(1) A在M上的作用可以用一个矩阵来表示；

(2) M中存在A的本征元。

4.3.7　设$x_0\in\mathscr{X}$，$f\in\mathscr{X}^*$，满足$\langle f,x_0\rangle=1$，令$A=x_0\otimes f$，并且$T=I-A$，求T的零链长p。

§4　Hilbert-Schmidt 定理

在 Hilbert 空间上，有一类有界线性算子，它们是 $\mathbf{R}^n$ 上的

对称矩阵的推广，称为对称算子，定义如下：

定义4.4.1 设 $A\in\mathscr{L}(H)$，称它是对称的，是指

$$(Ax,y)=(x,Ay)\qquad(\forall x,y\in H).\qquad(4.4.1)$$

注 注意到共轭算子的定义，

$$(Ax,y)=(x,A^*y)\qquad(\forall x,y\in H).\qquad(4.4.2)$$

比较(4.4.1)和(4.4.2)可见，为了 A 是对称算子必须且仅须 $A=A^*$。正是这个缘故，有时又把对称算子称为自共轭算子，或自伴算子(注意：前提是 $A\in\mathscr{L}(H)$!)。

例4.4.2 在 $\mathbb{R}^n$ 上，若 A 是对称阵，则 A 是对称的。在 $\mathbb{C}^n$ 上，若 A 是 Hermite 阵，则 A 是对称的。

例4.4.3 在实的 $L^2(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 上，设 $K\in L^\infty(\Omega\times\Omega,d\mu)$，并且 $K(x,y)=K(y,x)$，则

$$A:u(x)\mapsto\int_\Omega K(x,y)u(y)d\mu(y)$$

是 $L^2(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 上的对称算子。

例4.4.4 设 H 是 Hilbert 空间，M 是它的一个闭线性子空间。由 H 到 M 上的投影算子 P_M 便是对称的。

证 由正交分解定理，$\forall x,y\in H$，有分解：

$$x=x_M+x_{M^\perp}\quad(x_M\in M,x_{M^\perp}\in M^\perp),$$

$$y=y_M+y_{M^\perp}\quad(y_M\in M,y_{M^\perp}\in M^\perp).$$

由 P_M 的定义，$x_M=P_Mx,y_M=P_My$，因此有

$$(P_Mx,y)=(x_M,y_M+y_{M^\perp})=(x_M,y_M)=(x,P_My).$$

命题4.4.5 关于 H 上的对称算子，有下列基本性质：

(1) 为了 A 对称，必须且仅须 $(Ax,x)\in\mathbb{R}^1(\forall x\in H)$。

证 令 $a(x,y)\triangleq(Ax,y)(\forall x,y\in H)$，那末 $a(\cdot,\cdot)$ 是 H 上的共轭双线性函数，(Ax,x) 是由 $a(\cdot,\cdot)$ 诱导的二次型。由定义，我们有

$$A\text{ 对称}\Longleftrightarrow a(x,y)=\overline{a(y,x)}\quad(\forall x,y\in H).(4.4.3)$$

又由命题1.6.2，我们有

$$a(x,y)=\overline{a(y,x)}\quad(\forall\, x,y\in H)\Longleftrightarrow(Ax,x)\in\mathbb{R}^1\quad(\forall\, x\in H).\tag{4.4.4}$$

联合(4.4.3)和(4.4.4)即得结论。

(2) 若A对称，则$\sigma(A)\subset\mathbb{R}^1$，并且有

$$\|(\lambda I-A)^{-1}x\|\leqslant\frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|}\|x\|\quad(\forall\, x\in H,\forall\, x\in\mathbb{C},\mathrm{Im}\lambda\neq0).$$

证 设$\lambda=\mu+i\nu,\nu\neq0,\mu,\nu\in\mathbb{R}^1$，则由对称性，

$$\begin{aligned}\|(\lambda I-A)x\|^2&=\|(\mu I-A)x\|^2+|\nu|^2\|x\|^2\\&\geqslant|\nu|^2\|x\|^2\qquad(\forall\, x\in H).\end{aligned}\tag{4.4.5}$$

此外，$R(\lambda I-A)=H$，这是因为：

$$R(\lambda I-A)^{\perp}=N(\bar{\lambda}I-A^*)=N(\bar{\lambda}I-A),$$

再由(4.4.5)，$N(\bar{\lambda}I-A)=\{\theta\}$(当$\mathrm{Im}\lambda\neq0$)。

(3) 设H_1是H的一个闭线性子空间，A是H上的对称算子，则$A|_{H_1}$也是H_1上的对称算子。

(4) 若A对称，$\lambda,\lambda'\in\sigma_p(A),\lambda\neq\lambda'$，则

$$N(\lambda I-A)\perp N(\lambda' I-A).$$

证 若$x\in N(\lambda I-A)$，$x'\in N(\lambda' I-A)$，则

$$\lambda(x,x')=(Ax,x')=(x,Ax')=\lambda'(x,x'),$$

由$\lambda\neq\lambda'$，推出$(x,x')=0$。

(5) 若A对称，则

$$\sup_{\|x\|=1}|(Ax,x)|=\|A\|.$$

证 记$C\triangleq\sup\limits_{\|x\|=1}|(Ax,x)|$，$c\leqslant\|A\|$是显然的。下证$c\geqslant\|A\|$。由$A$的对称性和平行四边形法则，有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(Ax,y)&=\frac{1}{4}[(A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y)]\\&\leqslant\frac{c}{4}[\|x+y\|^2+\|x-y\|^2]\leqslant c,\end{aligned}$$

其中 $x,y\in H$，适合$\|x\|=\|y\|=1$。今取 $\alpha\in\mathbf{C}(|\alpha|=1)$，使得

$$\alpha(Ax,y)=|(Ax,y)|,$$

即得 $$|(Ax,y)|=(Ax,\bar{\alpha}y)=\mathrm{Re}(Ax,\bar{\alpha}y)\leqslant c.$$

这便推出：$\|A\|\leqslant c$。 ▌

在 Hilbert 空间上，对称紧算子 A 的谱和算子结构将更为清楚。对比有穷维情形的对称阵 A，它可以通过正交变换对角化，对角线上的元对应着 A 的本征值，而这些本征值又是 A 所对应的二次型 (Ax,x) 在单位球面$\|x\|=1$上的各个临界值。所有这些性质将被推广到无穷维空间。

我们从下列极值性质出发：

定理4.4.6 若 A 是对称紧算子，则必有 $x_0\in H$，$\|x_0\|=1$，使得

$$|(Ax_0,x_0)|=\sup_{\|x\|=1}|(Ax,x)|,$$

并且满足 $$Ax_0=\lambda x_0, \tag{4.4.6}$$

其中$|\lambda|=|(Ax_0,x_0)|$。

证 用 S_1表示H上的单位球面，不妨设

$$\sup_{x\in S_1}|(Ax,x)|=\sup_{x\in S_1}(Ax,x) \tag{4.4.7}$$

（否则用 $-A$ 代替 A）。取 $\lambda\triangleq\sup\limits_{x\in S_1}(Ax,x)$，考察 S_1上定义的函数

$$f(x)=(Ax,x)\qquad(\forall\, x\in S_1).$$

设$\{x_n\}\subset S_1$，满足 $f(x_n)\to\lambda$；因为$\|x_n\|=1$，所以有弱收敛子列，不妨仍记作 x_n。设 $x_n\rightharpoonup x_0$，由$\overline{B(\theta,1)}$的弱闭性，便有$\|x_0\|\leqslant 1$。再由 A 的紧性推出

$$Ax_n\to Ax_0\qquad(n\to\infty).$$

从而有 $f(x_n)\to(Ax_0,x_0)(n\to\infty)$，即得

$$(Ax_0,x_0)=\lambda. \tag{4.4.8}$$

进一步要证：$\|x_0\|=1$。用反证法。倘若不然，便有$\|x_0\|<1$，那末由命题4.4.5(5)和假设(4.4.7)，有

$$(Ax_0, x_0) \leqslant \|A\| \|x_0\|^2 = \sup_{x \in S_1} (Ax, x) \|x_0\|^2 < \lambda,$$

这与(4.4.8)矛盾。于是我们证明了：$\exists x_0 \in S_1$，使得

$$(Ax_0, x_0) = \sup_{x \in S_1} (Ax, x). \qquad (4.4.9)$$

最后再证(4.4.6)。$\forall y \in H$，对于$|t|$足够小的t，考察函数：

$$\varphi_y(t) \triangleq \frac{(A(x_0+ty), x_0+ty)}{(x_0+ty, x_0+ty)}.$$

注意到$t=0$使$\varphi_y(t)$达到极大，从而有$\varphi'_y(0)=0$，算出就是：

$$\mathrm{Re}(y, Ax_0 - \lambda x_0) = 0,$$

而$y \in H$是任意的，故有$Ax_0 = \lambda x_0$。 ▌

设A是H上的紧算子，按 Riesz-Schauder 理论，

$$\sigma(A) \backslash \{0\} = \sigma_p(A) \backslash \{0\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\},$$

如果$\{\lambda_n\}$中有无穷多个是不同的，那末满足$\lambda_n \to 0$；如果A还是自伴的，由命题4.4.5(2)，λ_n都是实数，此外还有

定理4.4.7(Hilbert-Schmidt) 若A是 Hilbert 空间H上的对称紧算子，则有至多可数个非零的，只可能以0为聚点的实数$\{\lambda_i\}$，它们是算子A的本征值，并对应一组正交规范基$\{e_i\}$，使得

$$x = \sum (x, e_i) e_i,$$
$$Ax = \sum \lambda_i (x, e_i) e_i. \qquad (4.4.10)$$

证 对$\forall \lambda \in \sigma_p(A) \backslash \{0\}$，设$N(\lambda I - A)$的正交规范基为

$$\{e_i^{(\lambda)}\}_{i=1}^{m(\lambda)},$$

其中$m(\lambda) \triangleq \dim N(\lambda I - A) < \infty$(称为$\lambda$的重数)。此外，若$0 \in \sigma_p(A)$，则设$N(A)$的正交规范基为

$$\{e_i^{(0)}\},$$

它不一定是可数的。如今我们令

$$\{e'_i\} \triangleq \bigcup_{\lambda \in \sigma_p(A) \setminus \{0\}} \{e_i^{(\lambda)}\}_{i=1}^{m(\lambda)},$$

$$\{e_i\} \triangleq \begin{cases} \{e'_i\} & (0 \overline{\in} \sigma_p(A)), \\ \{e'_i\} \cup \{e_i^{(0)}\} & (0 \in \sigma_p(A)). \end{cases}$$

再令 $M \triangleq \text{span}\{e_i\}$，在$M$上$A$显然有表示式(4.4.10)。

现在证 $\overline{M}=H$。用反证法。倘若不然，则 $M^\perp \neq \{\theta\}$。记$\tilde{A} \triangleq A|_{M^\perp}$，由定义 $\tilde{A}$ 不能有本征值，从而 $\tilde{A} \neq 0$；另一方面，由定理4.4.6，有

$$\|\tilde{A}\| = \sup_{\substack{x \in M^\perp \\ \|x\|=1}} |(\tilde{A}x, x)| = 0.$$

即 $\tilde{A}=0$，便得矛盾。从而$\{e_i\}$构成H的正交规范基。

注 1 我们可以将特征值按绝对值递减的顺序编号，并约定特征值的重数是几，就把那特征值接连编上几个号码，即排成：

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n| \geqslant |\lambda_{n+1}| \geqslant \cdots.$$

于是

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i \otimes e_i. \qquad (4.4.11)$$

更确切地有

$$\left\| A - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \otimes e_i \right\| \leqslant |\lambda_{n+1}| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

事实上，对 $\forall x \in H$，我们有

$$\left\| Ax - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x, e_i) e_i \right\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i (x, e_i) e_i \right\|$$

$$= \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i^2 |(x, e_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant |\lambda_{n+1}| \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |(x, e_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant |\lambda_{n+1}| \|x\|.$$

注 2 定理4.4.7表明：对称紧算子可以对角化，它的本征

值具有极值性质：

$$|\lambda_n| = \sup\{|(Ax,x)|\,|\,x\perp \text{span}\{e_1,\cdots,e_{n-1}\},\|x\|=1\}$$

$(n=1,2,\cdots)$，其中 $e_1,\cdots,e_{n-1}$ 是对应于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$的本征元。

特别地，我们可以按正负值把本征值排列起来，记作

$$\begin{aligned}&\lambda_1^+\geqslant\lambda_2^+\geqslant\cdots\geqslant 0,\\&\lambda_1^-\leqslant\lambda_2^-\leqslant\cdots<0.\end{aligned}\tag{4.4.12}$$

定理4.4.8（极小极大刻划） 设A是对称紧算子，对应有本征值(4.4.12)，则

$$\lambda_n^+ = \inf_{E_{n-1}}\ \sup_{\substack{x\in E_{n-1}^\perp\\ x\neq\theta}} \frac{(Ax,x)}{(x,x)},\tag{4.4.13}$$

$$\lambda_n^- = \sup_{E_{n-1}}\ \inf_{\substack{x\in E_{n-1}^\perp\\ x\neq\theta}} \frac{(Ax,x)}{(x,x)},\tag{4.4.14}$$

其中 E_{n-1}是H的任意 $n-1$维闭线性子空间。

证 我们只须证(4.4.13)，因为用$-A$代A，那末(4.4.13)蕴含了(4.4.14)。注意到若

$$x=\sum a_j^+e_j^+ + \sum a_j^-e_j^-,$$

则
$$\frac{(Ax,x)}{(x,x)}=\frac{\sum\lambda_j^+|a_j^+|^2+\sum\lambda_j^-|a_j^-|^2}{\sum|a_j^+|^2+\sum|a_j^-|^2}.$$

记(4.4.13)式右端为μ_n。下面从两个方面证明 $\lambda_n^+=\mu_n$：

(1) $\lambda_n^+\leqslant\mu_n$。事实上，$\forall E_{n-1}$，在span$\{e_1^+,\cdots,e_n^+\}$中总有向量$x_n\neq\theta$，使得$x_n\perp E_{n-1}$，于是

$$\sup_{\substack{x\perp E_{n-1}\\ x\neq\theta}}\frac{(Ax,x)}{(x,x)}\geqslant\frac{(Ax_n,x_n)}{(x_n,x_n)}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j^+|a_j^+|^2}{\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j^-|^2}\geqslant\lambda_n^+,$$

即得 $\lambda_n^+\leqslant\mu_n$。

(2) $\lambda_n^+\geqslant\mu_n$。事实上，取 $E_{n-1}=\text{span}\{e_1^+,\cdots,e_{n-1}^+\}$，便有

$$\lambda_n^+ = \sup_{\substack{x \perp E_{n-1} \\ x \neq \theta}} \frac{(Ax,x)}{(x,x)},$$

即得 $\lambda_n^+ \geqslant \mu_n$。

推论4.4.9 若两个对称紧算子 A,B，满足 $A \leqslant B$，即

$$(Ax,x) \leqslant (Bx,x) \qquad (\forall x \in H),$$

则

$$\lambda_j^+(A) \leqslant \lambda_j^+(B) \qquad (j=1,2,\cdots).$$

习　　题

（本节各题中，H 均指 Hilbert 空间）

4.4.1 设 $A \in \mathscr{L}(H)$，求证：$A+A^*, AA^*, A^*A$ 都是对称算子，并且

$$\|AA^*\| = \|A^*A\| = \|A\|^2.$$

4.4.2 设 $A \in \mathscr{L}(H)$，满足 $(Ax,x) \geqslant 0$ $(\forall x \in H)$，且 $(Ax,x)=0 \Longleftrightarrow x=\theta$，求证：

$$\|Ax\|^2 \leqslant \|A\|(Ax,x) \qquad (\forall x \in H).$$

4.4.3 设 A 是 H 上的对称紧算子，令

$$m(A) \triangleq \inf_{\|x\|=1} (Ax,x), \quad M(A) \triangleq \sup_{\|x\|=1} (Ax,x).$$

求证：

(1) 若 $m(A) \neq 0$，则 $m(A) \in \sigma_p(A)$；

(2) 若 $M(A) \neq 0$，则 $M(A) \in \sigma_p(A)$。

4.4.4 设 A 是对称紧算子，求证：

(1) 若 A 非零，则 A 至少有一个不等于零的本征值。

(2) 若 M 是 A 的非零不变子空间，则 M 上必含有 A 的本征元。

4.4.5 求证：为了 $P \in \mathscr{L}(H)$ 是一个正交投影算子，必须且仅须：

(1) P 是对称的，即 $P=P^*$；

(2) P 是幂等的，即 $P^2=P$。

4.4.6 求证：为了 $P\in\mathscr{L}(H)$ 是一个正交投影算子，必须且仅须：

$$(Px,x)=\|Px\|^2\qquad(\forall x\in H).$$

4.4.7 设 $A\in\mathscr{L}(H)$，称其为正算子，是指

$$(Ax,x)\geqslant 0\qquad(\forall x\in H).$$

求证：(1) 正算子必是对称的。

(2) 正的紧算子的一切本征值都是非负实数。

4.4.8 求证：为了 H 的闭线性子空间 L,M，满足 $L\subset M$，必须且仅须 P_M-P_L 是正算子。

4.4.9 设 $(a_{ij})(i,j=1,2,\cdots)$ 满足 $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2<\infty$，在 l^2 空间上，定义映射

$$A:x=\{x_1,x_2,\cdots\}\mapsto y=\{y_1,y_2,\cdots\},$$

其中 $y_i\triangleq\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j(i=1,2,\cdots)$。求证：

(1) A 是 H 上的紧算子；

(2) 又若 $a_{ij}=\overline{a_{ji}}\ (i,j=1,2,\cdots)$，则 A 是对称紧算子。

4.4.10 设 A 是 H 上的对称算子，并且存在一组由 A 的本征元组成的 H 的正交规范基。又设

(1) $\dim N(\lambda I-A)<\infty(\forall\lambda\in\sigma_p(A)\backslash\{0\})$；

(2) $\forall\varepsilon>0,\sigma_p(A)\backslash[-\varepsilon,\varepsilon]$ 只有有限个值。

求证：A 是 H 上的紧算子。

§5 对椭圆型方程的应用

这一节我们来研究下列边值问题：

$$\begin{cases}-\Delta u+U(x)u=f(x)\quad(x\in\Omega),\\ u|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}\tag{4.5.1}$$

其中 $\Omega\subset R^n$ 是一个有界的，具有光滑边界的开区域。给定 $U(x)$

$\in C(\bar{\Omega})$, $f\in L^2(\Omega)$，问在什么条件下，问题(1)是可解的？

历史上，有许多数学家致力于这个问题的研究，通常采用位势积分将其化归成积分方程，再用 Fredholm 理论导出原问题的解。有了对称紧算子的 Riesz–Schauder 理论，以及 Соболев 空间结果以后，我们便有可能撇开积分算子直接研究椭圆型方程 Dirichlet 问题，近代偏微分方程的理论采用这后一种途径。

称 $u\in H_0^1(\Omega)$ 是(4.5.1)的一个弱解，是指：

$$\int_\Omega[\nabla u\cdot\nabla v+U(x)uv]dx=\int_\Omega fv dx\quad(\forall v\in H_0^1(\Omega)).\tag{4.5.2}$$

显然，若 $u\in H^2(\Omega)$ 满足(4.5.1)，则 u 必是它的一个弱解。反过来，在偏微分方程理论中证明了：(4.5.3)的弱解必是 $H^2(\Omega)$ 解。因此，从泛函分析应用的角度来说，我们将只关心方程(4.5.1)的弱解的存在性。

我们要把方程(4.5.2)化归成为对称紧算子问题。为此在 $H_0^1(\Omega)$ 上引入等价模：

$$|||u|||=\left(\int_\Omega|\nabla u|^2dx-\int_\Omega(U(x)+\lambda_0)u^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\lambda_0\triangleq\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}|U(x)|$。根据 Poincaré 不等式，存在常数 $m,M>0$，使得

$$m\|u\|_1\leqslant|||u|||\leqslant M\|u\|_1\quad(\forall u\in H_0^1(\Omega)),\tag{4.5.3}$$

其中 $\|\cdot\|_1$ 表示 $H_0^1(\Omega)$ 的范数。(4.5.3)表明 $|||\cdot|||$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 的等价范数，所以 $H_0^1(\Omega)$ 在范数 $|||\cdot|||$ 下是 Banach 空间。又令

$$(u,v)_{\lambda_0}=\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v dx+\int_\Omega(U(x)+\lambda_0)u(x)v(x)dx,\tag{4.5.4}$$

其中 $u,v\in H_0^1(\Omega)$。$(\cdot,\cdot)_{\lambda_0}$ 是由模 $|||\cdot|||$ 产生的内积。$H_0^1(\Omega)$ 在内积(4.5.4)下是 Hilbert 空间。记 $\|\cdot\|$ 为 $L^2(\Omega)$ 的范数，再由

Poincaré 不等式，对 $\forall u\in L^2(\Omega)$，我们有

$$\left|\int_\Omega uvdx\right|\leqslant\|u\|\|v\|\leqslant c\|u\|\,|||v|||\quad(\forall v\in \dot{H}_0^1(\Omega)),\tag{4.5.5}$$

其中 c 为正常数。于是按 Riesz 定理2.2.1，$\exists|\, w\in H_0^1(\Omega)$，使得

$$\int_\Omega uvdx=(w,v)_{\lambda_0}\qquad(\forall v\in H_0^1(\Omega)).\tag{4.5.6}$$

定义 K_{λ_0}：$L^2(\Omega)\to H_0^1(\Omega)$ 为 $w=K_{\lambda_0}u$，便有

$$|||K_{\lambda_0}u|||\leqslant c\|u\|\quad(\forall u\in L^2(\Omega)).$$

因此 K_{λ_0}是 $L^2(\Omega)\to H_0^1(\Omega)$的连续线性算子。

记 ι 为 $H_0^1(\Omega)\to L^2(\Omega)$的嵌入算子，由 Rellich 定理 的推论 3.5.11，ι 是紧的。于是(4.5.2)等价于

$$(u,v)_{\lambda_0}=(K_{\lambda_0}f,v)_{\lambda_0}+\lambda_0(K_{\lambda_0}\iota u,v)_{\lambda_0}\quad(\forall v\in H_0^1(\Omega)),$$

即等价于在 $H_0^1(\Omega)$中解方程

$$(I-\lambda_0K_{\lambda_0}\iota)u=K_{\lambda_0}f.\tag{4.5.7}$$

应用 Riesz-Fredholm 定理，

$$\text{方程(4.5.7)有解}\Longleftrightarrow K_{\lambda_0}f\perp N(I-\lambda_0K_{\lambda_0}\iota).$$

然而

$$\begin{aligned}u\in N(I-\lambda_0K_{\lambda_0}\iota)&\Longleftrightarrow u=\lambda_0K_{\lambda_0}\iota u\\&\Longleftrightarrow(u,v)_{\lambda_0}=\lambda_0\int_\Omega uvdx\quad(\forall v\in H_0^1(\Omega))\\&\Longleftrightarrow\int_\Omega[\nabla u\cdot\nabla v+U(x)uv]dx=0\quad(\forall v\in H_0^1(\Omega)),\end{aligned}$$

即 u 是(4.5.1)的齐次方程的弱解。设(4.5.1)的齐次方程的弱解由$\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$张成，那末

$$(K_{\lambda_0}f,\varphi_i)_{\lambda_0}=0\Longleftrightarrow\int_\Omega f\varphi_idx=0\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

总结起来，我们得到

定理4.5.1 若方程(4.5.1)的齐次方程只有零解，则 $\forall f\in L^2(\Omega)$，(4.5.1)存在唯一的弱解；否则，(4.5.1)的齐次方程至多有有穷个线性无关的弱解，设它们为$\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$。这时，当且

仅当

$$\int_\Omega f\varphi_i dx = 0 \qquad (i=1,2,\cdots,n),$$

方程(4.5.1)有解，且其解空间的维数是 n。∎

下面转向考察(4.5.1)对应的本征值问题：

$$\begin{cases} -\Delta u + U(x)u = \lambda u & (x\in\Omega), \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{4.5.8}$$

它对应的方程(4.5.7)是：

$$(I-(\lambda+\lambda_0)K_{\lambda_0}I)u = 0.$$

应用 Riesz-Schauder 以及 Hilbert-Schmidt 理论，我们知道 $\sigma(K_{\lambda_0}I)\backslash\{0\}$是实的，而且至多有可数个，记它们为 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_j,\cdots$；又若 $\{\mu_j\}$ 有可数多个不同的值，则 $\mu_j\to 0(j\to\infty)$。特别是因为

$$(K_{\lambda_0}Iu,u)_{\lambda_0}>0 \qquad (\text{当 } u\neq 0),$$

所以 $\mu_j>0$，并且$0\overline{\in}\sigma_p(K_{\lambda_0}I)$。又由于 $H_0^1(\Omega)$ 是无穷维的，不难验证$\{\mu_j\}$有可数多个并且 $\mu_j\to 0(j\to\infty)$。不妨设

$$\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_j\geqslant\cdots>0.$$

于是(4.5.8)的本征值

$$\lambda_j = \frac{1}{\mu_j}-\lambda_0 \qquad (j=1,2,\cdots)$$

满足 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_j\leqslant\cdots$，以及 $\lambda_j\to\infty$。

最后给出 λ_j 的"极小极大"描写，因为

$$\mu_j = \inf_{E_{j-1}} \sup_{\substack{u\in E_{j-1}^\perp \\ u\neq\theta}} \frac{(K_{\lambda_0}Iu,u)_{\lambda_0}}{(u,u)_{\lambda_0}},$$

所以

$$\lambda_j = \frac{1}{\mu_j}-\lambda_0 = \sup_{E_{j-1}} \inf_{\substack{u\in E_{j-1}^\perp \\ u\neq\theta}} \frac{(u,u)_{\lambda_0}}{(K_{\lambda_0}Iu,u)_{\lambda_0}}-\lambda_0$$

$$= \sup_{E_{j-1}} \inf_{\substack{u \in E_{j-1}^{\perp} \\ u \neq 0}} \frac{\int_{\Omega}[|\nabla u|^2 + Uu^2]\,dx}{\int_{\Omega} u^2 dx},$$

其中 E_{j-1} 是维数为 $j-1$ 的任意的闭线性子空间($j=1,2,\cdots$)。

总结起来，有

定理4.5.2 方程(4.5.8)的本征值都是实的，而且有可数个 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_j \leqslant \cdots$，适合 $\lambda_j \to \infty$，并且它们对应的本征函数构成空间 $H_0^1(\Omega)$ 的完备正交集。

习 题

4.5.1 设 $a_i(x) \in C^1(\Omega)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，$U(x) \in C(\bar{\Omega})$，其中 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的边界光滑的有界开区域，讨论下列边值问题：

$$\begin{cases} -\Delta u + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}(a_i(x)u) + U(x)u = f(x) \quad (x \in \Omega), \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

提示 应用 Lax-Milgram 定理。

4.5.2 在上题中，讨论下列本征值问题：

$$\begin{cases} -\Delta u + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}(a_i(x)u) + U(x)u = \lambda u \quad (x \in \Omega), \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

§6 Fredholm 算子

在§2中，我们曾指出具有连续核的积分方程(或更一般的二元平方可和的核)，可以利用紧算子的 Fredholm 理论讨论可解性，然而下列形式的奇异积分方程却不包含在紧算子理论的框架之中：

$$a(z)u(z) + \frac{b(z)}{\pi} \text{P.V.} \int_{S^1} \frac{u(s)}{z-s} ds = f(z) \quad (z \in S^1), \quad (4.6.1)$$

其中 S^1 表示平面上的单位圆周，$a, b \in C(S^1)$，$f \in L^2(S^1)$，

P.V.表示按主值意义的积分，即

$$\mathrm{P.V.}\int_{S^1}\frac{u(s)}{z-s}ds\triangleq\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\substack{|s-z|\geq\varepsilon\\ s\in S^1}}\frac{u(s)}{z-s}ds.$$

为了讨论形如(4.6.1)的方程的可解性，我们回顾一下§2中关于可解性的讨论。其实，算子A的紧性作用，只在证明：(1) $R(T)$是闭的，从而 Fredholm结论 3 成立；以及(2) $\dim N(T)=\dim N(T^*)<\infty$，时用到。

现在丢掉紧性条件，我们直接引入

定义4.6.1 设$\mathscr{X},\mathscr{Y}$是 Banach 空间，$T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 称为一个 Fredholm 算子，是指：

(1) $R(T)$是闭的；

(2) $\dim N(T)<\infty$；

(3) $\operatorname{codim}R(T)<\infty$。

$\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$的一切 Fredholm 算子的全体记作 $\mathscr{F}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，特别地当$\mathscr{Y}=\mathscr{X}$时，记作$\mathscr{F}(\mathscr{X})$。

定义4.6.2 设$T\in\mathscr{F}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，令

$$\operatorname{ind}(T)\triangleq\dim N(T)-\operatorname{codim}R(T).$$

并称其为T的**指标**。

例4.6.3 若$A\in\mathfrak{C}(\mathscr{X})$，则$T=I-A\in\mathscr{F}(\mathscr{X})$，并且

$$\operatorname{ind}(T)=0.$$

例4.6.4 若$\mathscr{X}=l^2$，T是$\mathscr{X}$上的左推移算子，即

$$T:x=(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(x_2,x_3,\cdots),$$

则$T\in\mathscr{F}(\mathscr{X})$，并且$\operatorname{ind}(T)=1$。同理，$T^*$是右推移算子，即

$$T^*:x=(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(0,x_1,x_2,\cdots),$$

有$T^*\in\mathscr{F}(\mathscr{X})$，并且$\operatorname{ind}(T^*)=-1$。一般地，还有

$$T^n\in\mathscr{F}(\mathscr{X}),\quad \operatorname{ind}(T^n)=n\quad(n=1,2,\cdots);$$

以及 $$(T^*)^n\in\mathscr{F}(\mathscr{X}),\ \operatorname{ind}((T^*)^n)=-n\quad(n=1,2,\cdots).$$

下面我们来刻划 Fredholm 算子。

定理4.6.5 (1) 若 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$,则必有 $S\in\mathscr{L}(\mathscr{Y},\mathscr{X})$ 以及 $A_1\in\mathfrak{C}(\mathscr{X})$, $A_2\in\mathfrak{C}(\mathscr{Y})$, 使得

$$ST=I_x-A_1,\qquad TS=I_y-A_2,\tag{4.6.2}$$

其中 I_x,I_y 分别表示$\mathscr{X}$和$\mathscr{Y}$上的恒同算子。

(2) 如果 $T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, 又有 $R_1,R_2\in\mathscr{L}(\mathscr{Y},\mathscr{X})$以及$A_1\in\mathfrak{C}(\mathscr{X})$, $A_2\in\mathfrak{C}(\mathscr{Y})$, 使得

$$R_1T=I_x-A_1,\qquad TR_2=I_y-A_2;\tag{4.6.3}$$

则 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$。

证 (1) 考察图4.6.1, 令

$$\tilde{T}[x]=Tx\quad(\forall x\in[x])\quad(\forall [x]\in\mathscr{X}/N(T)).$$

由假设 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, 从而 $\tilde{T}$: $\mathscr{X}/N(T)\to R(T)$ 有连续逆 $\tilde{T}^{-1}$, 并且存在投影算子 (参看习题 4.2.6 与 4.1.10):

$$A_1:\mathscr{X}\to N(T),$$

$$A_2:\mathscr{Y}\to\mathscr{Y}/R(T).$$

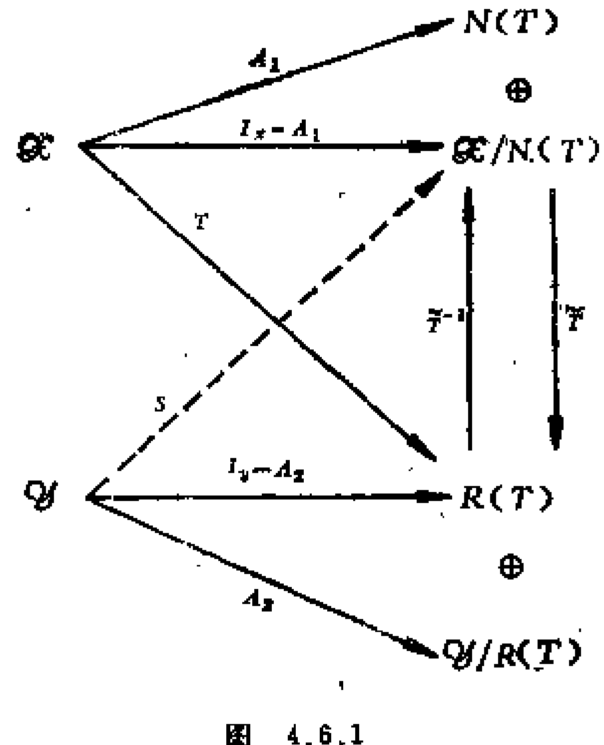


图 4.6.1

显然 A_1 和 A_2 都是有穷秩的, 从而是紧的。令

$$S\triangleq\tilde{T}^{-1}(I_y-A_2),$$

便有

$$ST=\tilde{T}^{-1}T=I_x-A_1,$$

以及

$$TS=T\tilde{T}^{-1}(I_y-A_2)=I_y-A_2.$$

(2) 如果 $\exists R_1,R_2$ 及 A_1,A_2, 使得(4.6.3)成立, 那末

$$N(T)\subset N(R_1T)=N(I_x-A_1)\Rightarrow\dim N(T)<\infty,$$

以及

$$R(T)\supset R(TR_2)=R(I_y-A_2)$$

$$\Rightarrow\operatorname{codim}R(T)\leqslant\operatorname{codim}R(I_y-A_2)<\infty.$$

至于 $R(T)$ 闭性的验证，可以仿照定理4.2.3的证明，故从略。

注 1 满足 (4.6.3)的 R_1,R_2 分别称为 T 的左右正则化子。在商掉紧算子集 $\mathfrak{C}(\mathscr{X})$(以及 $\mathfrak{C}(\mathscr{Y})$)意义下，它们分别是 T 的左右逆。在这个意义下，定理4.6.5(1)表明 Fredholm 算子是 $\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 中模 $\mathfrak{C}(\mathscr{X})$(及 $\mathfrak{C}(\mathscr{Y})$)的可逆算子。

注 2 从定理4.6.5(2)容易看出，若 R 同时是 T 的左右正则化子，则 R 本身也是 Fredholm 算子。特别是由此推出：若 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，则 $\exists S\in\mathscr{F}(\mathscr{Y},\mathscr{X})$，以及 $A_1\in\mathfrak{C}(\mathscr{X}),A_2\in\mathfrak{C}(\mathscr{Y})$，使得(4.6.2)成立。

关于 Fredholm 算子的指标有如下性质：

定理4.6.6 若 $T_1\in\mathscr{F}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，$T_2\in\mathscr{F}(\mathscr{Y},\mathscr{Z})$，其中 $\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$，$\mathscr{Z}$ 都是 Banach 空间，则 $T_2T_1\in\mathscr{F}(\mathscr{X},\mathscr{Z})$，且

$$\operatorname{ind}(T_2T_1)=\operatorname{ind}(T_1)+\operatorname{ind}(T_2). \qquad (4.6.4)$$

证 由定理4.6.5(1)，$\exists S_1\in\mathscr{F}(\mathscr{Y},\mathscr{X}),S_2\in\mathscr{F}(\mathscr{Z},\mathscr{Y})$，使得

$$\begin{cases}S_1T_1=I_x-A_1^{(1)},\\ T_1S_1=I_y-A_2^{(1)};\end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases}S_2T_2=I_y-A_1^{(2)},\\ T_2S_2=I_z-A_2^{(2)}.\end{cases}$$

取 $S\triangleq S_1S_2$，即得

$$\begin{aligned}S(T_2T_1)&=S_1(S_2T_2)T_1=S_1(I_y-A_1^{(2)})T_1\\&=S_1T_1-S_1A_1^{(2)}T_1\\&=I_x-A_1^{(1)}-S_1A_1^{(2)}T_1=I_x-\text{紧算子}.\end{aligned}$$

同理可证 $(T_2T_1)S$ 是恒同减去紧算子，从而 $T_2T_1\in\mathscr{F}(\mathscr{X},\mathscr{Z})$。

现在再证指标公式(4.6.4)。为此我们先观察图4.6.2。

记
$$\begin{aligned}&\mathscr{Y}_2=R(T_1)\cap N(T_2), &&\mathscr{X}_2=T_1^{-1}\mathscr{Y}_2,\\&\mathscr{Y}_1=R(T_1)\ominus\mathscr{Y}_2, &&\mathscr{Y}_3=N(T_2)\ominus\mathscr{Y}_2,\\&\mathscr{Y}_4=\mathscr{Y}/R(T_1)\ominus\mathscr{Y}_3, &&\mathscr{Z}_4=T_2\mathscr{Y}_4.\end{aligned}$$

便有
$$R(T_2)\cong\mathscr{Y}/N(T_2)=\mathscr{Y}_1+\mathscr{Y}_4,$$
$$\mathscr{X}_2\cong\mathscr{Y}_2,\qquad \mathscr{Z}_4\cong\mathscr{Y}_4,$$

以及 $$N(T_2T_1)=N(T_1)\oplus\mathscr{X}_2,$$
$$R(T_2)=R(T_2T_1)\oplus\mathscr{Z}_4.$$
于是，若记 $T=T_2T_1$，则有
$$\dim N(T)=\dim N(T_1)+\dim\mathscr{X}_2=\dim N(T_1)+\dim\mathscr{Y}_2,$$
$$\operatorname{codim} R(T)=\operatorname{codim} R(T_2)+\dim\mathscr{Z}_4=\operatorname{codim} R(T_2)+\dim\mathscr{Y}_4,$$
$$\operatorname{codim} R(T_1)=\dim\mathscr{Y}_3+\dim\mathscr{Y}_4,$$
$$\dim N(T_2)=\dim\mathscr{Y}_2+\dim\mathscr{Y}_3.$$

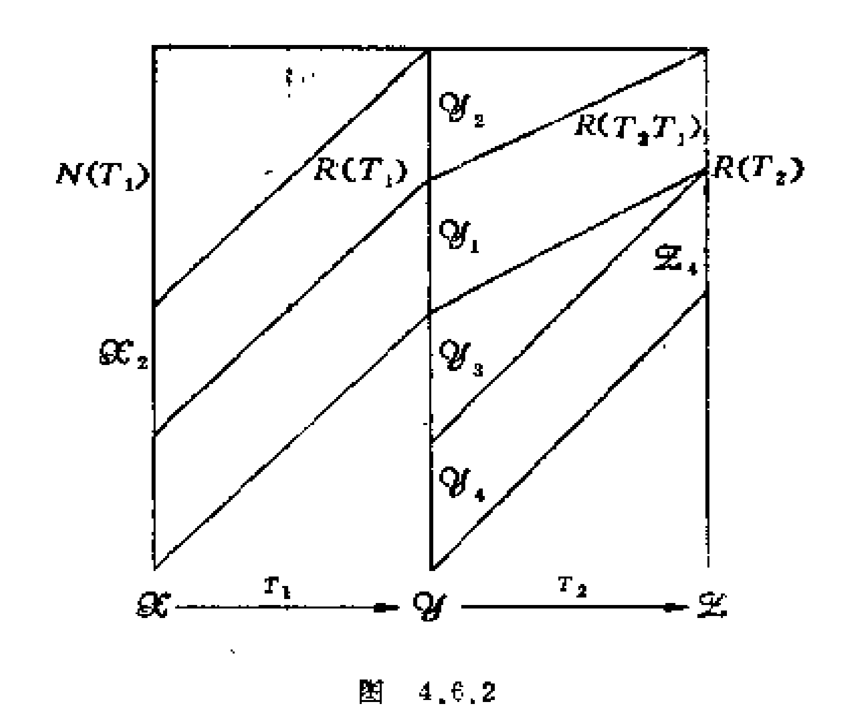


图 4.6.2

联合起来得到
$$\begin{aligned}\operatorname{ind}(T)&=\dim N(T)-\operatorname{codim} R(T)\\&=\dim N(T_1)+\dim N(T_2)-\operatorname{codim} R(T_2)\\&\quad-\operatorname{codim} R(T_1)\\&=\operatorname{ind}(T_1)+\operatorname{ind}(T_2).\end{aligned}$$

定理4.6.7 若 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，则存在 $\varepsilon>0$，使得当 $S\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，且 $\|S\|<\varepsilon$ 时，
$$T+S\in\mathscr{F}(\mathscr{X},\mathscr{Y}),$$

且有 $$\mathrm{ind}(T+S)=\mathrm{ind}(T).$$

证 由定理4.6.5(1)，$\exists R\in\mathscr{F}(\mathscr{Y},\mathscr{X})$ 及 $A_1\in\mathfrak{C}(\mathscr{X})$，$A_2\in\mathfrak{C}(\mathscr{Y})$，使得

$$RT=I_x-A_1,\qquad TR=I_y-A_2. \tag{4.6.5}$$

从而 $$R(T+S)=I_x-A_1+RS.$$

当$\|S\|<1/\|R\|$时，$E_1\triangleq(I_x+RS)^{-1}$ 有界，因此

$$E_1R(T+S)=I_x-E_1A_1. \tag{4.6.6}$$

同理，当$\|S\|<1/\|R\|$时，$E_2\triangleq(I_y+SR)^{-1}$ 有界，因此

$$(T+S)RE_2=I_y-A_2E_2, \tag{4.6.7}$$

因为$E_1A_1\in\mathfrak{C}(\mathscr{X})$且$A_2E_2\in\mathfrak{C}(\mathscr{Y})$，所以，由定理 4.6.5(2)，联合(4.6.6)与(4.6.7)便推出

$$T+S\in\mathscr{F}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\quad\left(\text{当}\|S\|<\frac{1}{\|R\|}\right).$$

因为当$\|S\|<1/\|R\|$时，E_1 有有界逆，所以这时

$$E_1\in\mathscr{F}(\mathscr{X}),\quad\text{且}\quad \mathrm{ind}(E_1)=0. \tag{4.6.8}$$

由(4.6.6)及定理4.6.6得

$$\mathrm{ind}(E_1)+\mathrm{ind}(R)+\mathrm{ind}(T+S)=0, \tag{4.6.9}$$

又由(4.6.5)及定理4.6.6得

$$\mathrm{ind}(R)+\mathrm{ind}(T)=0. \tag{4.6.10}$$

联合(4.6.8)，(4.6.9)和(4.6.10)，即得

$$\mathrm{ind}(T+S)=\mathrm{ind}(T)\quad\left(\text{当}\|S\|<\frac{1}{\|R\|}\right).$$

注 从定理的证明中可直接看出，定理中的ε有估计如下：若R是T的一个正则化子，则可取$\varepsilon<1/\|R\|$。

作为例子，我们来考察本节一开始提到的奇异积分算子．设$u\in L^2(S^1)$，其中S^1表示$\mathbf{R}^2$上的单位圆周．记

$$(Hu)(z)\triangleq\frac{1}{\pi i}\mathrm{P.V.}\int_{S^1}\frac{u(s)}{s-z}ds\quad(\forall z\in S^1).$$

命题4.6.8 $H\in\mathscr{L}(L^2(S^1))$.

证 首先我们用 Fourier 级数建立 $L^2(S^1)$ 与 l^2 间的等距同构。$\forall u\in L^2(S^1)$，将它展开成 Fourier 级数

$$u(e^{i\theta})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\theta}\quad(0\leqslant\theta<2\pi),$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

容易验证：

$$L^2(S^1)\ni u\mapsto\{c_n\}_{-\infty}^{\infty}\in l^2$$

是等距同构的。其次，注意到

$$\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-e^{i\theta}}=\frac{1}{2}\left[1+\frac{e^{i\varphi}+e^{i\theta}}{e^{i\varphi}-e^{i\theta}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+i\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}\right],$$

可见

$$(Hu)(e^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\ \mathrm{P.V.}\int_0^{2\pi}\left[1+i\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}\right]u(e^{i\varphi})d\varphi$$

$$=c_0+i\tilde{u}(e^{i\theta}),$$

其中

$$\tilde{u}(e^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\ \mathrm{P.V.}\int_0^{2\pi}u(e^{i\varphi})\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}d\varphi$$

是 u 的共轭函数。它有 Fourier 级数：

$$\tilde{u}(e^{i\theta})=-i\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\operatorname{sign}(n)e^{in\theta},$$

其中

$$\operatorname{sign}(n)=\begin{cases}-1 & (n<0),\\ 0 & (n=0),\\ 1 & (n>0).\end{cases}$$

因此 $\tilde{u}\in L^2(S^1)$，并且 $\|\tilde{u}\|\leqslant\|u\|$。此外，易见

$$P: u \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

是 $L^2(S^1)$ 上的投影算子。最后，注意到关系式：

$$Pu = \frac{1}{2}(u + i\tilde{u}) + \frac{1}{2}c_0 = \frac{1}{2}(u + Hu),$$

即得
$$H = 2P - I, \tag{4.6.11}$$
所以有 $H \in \mathscr{L}(L^2(S^1))$。

注 由(4.6.11)立即得到：若 $a, b \in C(S^1)$，则

$$aI + ibH = (a + ib)P + (a - ib)(I - P). \tag{4.6.12}$$

引理4.6.9 $\forall \varphi \in C(S^1)$，如果定义算子

$$[\varphi, P] \triangleq \varphi \cdot P - P\varphi \cdot,$$

其中 $\varphi \cdot$ 表示 $L^2(S^1)$ 上的乘法算子，P 是命题 4.6.8 的证明中引进的投影算子，那末

$$[\varphi, P] \in \mathfrak{C}(L^2(S^1)) \quad (\forall \varphi \in C(S^1)).$$

证 (1) 若 $\varphi = e^{im\theta} (m \in \mathbb{Z})$，则

$$[\varphi, P]u = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i(n+m)\theta} - \sum_{n \geq -m}^{\infty} c_n e^{i(m+n)\theta}$$
$$= \sum_{-m < n < 0} c_n e^{i(m+n)\theta},$$

它是一个有穷秩算子。

(2) 对任意的三角多项式 $\varphi = \sum_{|n| \leq N} d_n e^{in\theta}$，由(1)，$[\varphi, P]$也是有穷秩算子。

(3) $\forall \varphi \in C(S^1)$，$\forall \varepsilon > 0$，存在三角多项式 φ_ε，使得

$$\|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_{C(S^1)} < \frac{\varepsilon}{2},$$

从而

$$\|[\varphi, P] - [\varphi_\varepsilon, P]\|_{\mathscr{L}(L^2(S^1))}$$
$$= \|[\varphi - \varphi_\varepsilon, P]\|_{\mathscr{L}(L^2(S^1))} < \varepsilon.$$

于是，由命题4.1.2(3)，我们证明了：

$$[\varphi,P]\in\mathfrak{C}(L^2(S^1)).\ \blacksquare$$

对 $\forall\varphi\in C(S^1)$，我们称

$$\nu_\varphi\triangleq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\arg\varphi(\mathrm{e}^{i\theta})$$

为函数 φ 关于原点的环绕数。

定理4.6.10 若 $c,d\in C(S^1)$，满足 $(c\cdot d)(z)\neq0(\forall z\in S^1)$，则算子 $T=cP+d(I-P)\in\mathscr{F}(L^2(S^1))$，并且

$$\operatorname{ind}(T)=\nu_d-\nu_c,$$

其中 ν_c 和 ν_d 分别是函数 c 和 d 关于原点的环绕数。

证 (1) 取 $S=\frac{1}{c}\cdot P+\frac{1}{d}\cdot(I-P)$，按引理4.6.9，它是 T 的正则化子。

(2) 注意到，由引理4.6.9，

$$T=c\cdot P+d\cdot(I-P)=Pc\cdot P+(I-P)d\cdot(I-P)+K,$$

其中 $K\in\mathfrak{C}(L^2(S^1))$。若用 l_+^2,l_-^2 分别表记 $PL^2(S^1)$ 与 $(I-P)L^2(S^1)$ 按Fourier展开对应的 l^2 子空间，则

$$Pc\cdot P\in\mathscr{F}(l_+^2),\quad (I-P)d\cdot(I-P)\in\mathscr{F}(l_-^2).$$

由假设 c 的关于原点的环绕数是 ν_c，这表明：$\exists\ c$ 与 $\mathrm{e}^{i\nu_c\theta}$ 间的同伦，即存在连续映射

$$F:\ [0,1]\times S^1\to\mathbb{C}\backslash\{0\},$$

使得 $F(0,\mathrm{e}^{i\theta})=c(\mathrm{e}^{i\theta}),\quad F(1,\mathrm{e}^{i\theta})=\mathrm{e}^{i\nu_c\theta}.$

又因为 $|F|$ 在 $[0,1]\times S^1$ 上不为0，所以有下界 $\delta>0$，分割 $[0,1]$ 为 N 等分，使得在每个小区间 $[t_j,t_{j+1}]$ 上，

$$|\Delta_jF|\triangleq\max_{t,s\in[t_j,t_{j+1}]}|F(t,\mathrm{e}^{i\theta})-F(s,\mathrm{e}^{i\theta})|<\frac{1}{\delta}.$$

应用定理4.6.7及其注，可得：

$$\operatorname{ind}(Pc\cdot P|_{l_+^2})=\operatorname{ind}(P\mathrm{e}^{i\nu_c\theta}\cdot P|_{l_+^2})=-\nu_c,$$

上式最后一个等号是因为 $P\mathrm{e}^{i\nu_c\theta}\cdot P|_{l_+^2}$ 是 l_+^2 上的推移算子。同

理

$$\operatorname{ind}((I-P)d\cdot(I-P)|_{l^2})$$

$$=\operatorname{ind}((I-P)e^{i\nu_d\theta}\cdot(I-P)|_{l^2})=\nu_d.$$

从而(参看习题4.6.2)

$$\operatorname{ind}(T)=\nu_d-\nu_c.$$

注 定理4.6.10的逆命题也是对的，即，如果

$$c\cdot P+d\cdot(I-P)\in\mathscr{F}(L^2(S^1)),$$

那末$(c\cdot d)(z)\neq 0(\forall z\in S^1)$. 请参看下册第五章.

习　　题

(本节各题中的$\mathscr{X},\mathscr{Y},\mathscr{Z}$均指$B$空间)

4.6.1 设$T\in\mathscr{F}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，$A\in\mathfrak{C}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，求证：

(1) $T+A\in\mathscr{F}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$；

(2) $\operatorname{ind}(T+A)=\operatorname{ind}(T)$.

4.6.2 设$T\in\mathscr{F}(\mathscr{X})$，$S\in\mathscr{F}(\mathscr{Y})$，求证：

(1) $T\oplus S\in\mathscr{F}(\mathscr{X}\oplus\mathscr{Y})$；

(2) $\operatorname{ind}(T\oplus S)=\operatorname{ind}(T)+\operatorname{ind}(S)$.

4.6.3 设$\mathscr{X}\subset\mathscr{Y}$，并且$\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$的嵌入算子是紧的，又设$T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$满足：

$$\|x\|_{\mathscr{X}}\leqslant c(\|x\|_{\mathscr{Y}}+\|Tx\|_{\mathscr{Y}})\quad(\forall x\in\mathscr{X}),\qquad(4.6.13)$$

其中c是一常数. 求证：

(1) $\dim N(T)<\infty$；

(2) $R(T)$是闭的.

4.6.4 在上题中，如果将(1)与(2)作为假设，求证：存在常数$c>0$，使得(4.6.13)成立.

4.6.5 设$T\in\mathscr{F}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，求证：

(1) $T^*\in\mathscr{F}(\mathscr{Y}^*,\mathscr{X}^*)$；

(2) $\operatorname{ind}(T^*)=-\operatorname{ind}(T)$.

4.6.6 在例4.6.4中，求 T 的左右正则化子。

4.6.7 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 是由光滑曲线 Γ 围成的区域，$\mathscr{X}\subset C(\bar{\Omega})$ 是由在 Ω 内解析，在 $\bar{\Omega}$ 上连续的函数组成的闭线性子空间。求证：限制算子

$$R: u(z)\mapsto u(z)|_{z\in\Gamma}$$

是 $\mathscr{X}\to C(\Gamma)$ 的 Fredholm 算子，并求它的指标。

4.6.8 设 $a_j(x)\in C[0,1]\ (j=1,2,\cdots,n)$，

$$T=\left(\frac{d}{dx}\right)^n+a_1(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}+\cdots+a_n(x),$$

求证：$T\in\mathscr{F}(C^n[0,1],\ C[0,1])$，并求 $\operatorname{ind}(T)$。

4.6.9 设 $a(x)\in C[0,1]$，$T=a(x)\cdot$，求证：

$$T\in\mathscr{F}(C[0,1])\Longleftrightarrow a(x)\neq 0\quad(\forall x\in[0,1]).$$

4.6.10 设 $A\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$，并 $\exists n\in\mathbf{N}$，使得

$$I-A^n\in\mathfrak{C}(\mathscr{X}),$$

求证：$A\in\mathscr{F}(\mathscr{X})$。

4.6.11 设 $T_1\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，$T_2\in\mathscr{L}(\mathscr{Y},\mathscr{X})$，使得 $T_2T_1\in\mathscr{F}(\mathscr{X},\mathscr{X})$，求证：

$$T_1\in\mathscr{F}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\Longleftrightarrow T_2\in\mathscr{F}(\mathscr{Y},\mathscr{X}).$$

4.6.12 设 D 为复平面上的单位圆盘，$H^2(D)$ 是 D 上的Hardy空间，它指在 D 内解析且其 Taylor 系数序列属于 l^2 的函数全体。

$$(f,g)\triangleq\sum_{n=0}^{\infty}a_n\bar{b}_n\quad(\forall f,g\in H^2(D)),$$

其中
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n\ \ (\forall z\in D).$$

又记 $S^1=\partial D$，对 $\forall\varphi\in C(S^1)$，定义 Toeplitz 算子 T_φ 如下：

$$T_\varphi=PM_\varphi\iota,$$

其中 P 是 $L^2(S^1)\to H^2(D)$ 的正交投影算子，即

$$P: u(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \mapsto u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n (\forall z \in D);$$

M_φ 是 $L^2(S^1) \to L^2(S^1)$ 的乘法算子，即 $u \to \varphi \cdot u$；而 ι 是 $\tilde{H}^2(D) \to L^2(S^1)$ 的嵌入算子，即

$$\iota: u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \mapsto u(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\theta}.$$

求证：若 $\varphi(s) \neq 0 (\forall s \in S^1)$，则 $T_\varphi \in \mathscr{F}(\tilde{H}^2(D))$，并且

$$\operatorname{ind}(T_\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\arg \varphi(e^{i\theta}).$$

符号表

$\mathbb{N}$	全体正整数
$\mathbb{Z}$	全体整数
$\mathbb{R}^1$	全体实数
$\mathbb{R}^n$	n 维 Euclid 空间
$\mathbb{C}$	全体复数
$\mathbb{K}$	数域，实数或复数
∞	正无穷大或复平面上的无穷远点
$\varnothing$	空集
θ	向量空间的零元素
$B(x_0,r)$	以 x_0 为中心，以 r 为半径的开球
$\mathring{E}$	集合 E 的内点全体
$\mapsto$	对应到
1-1	一对一
$\hookrightarrow$	嵌入
$\triangleq$	右端是左端的定义
$\exists \mid$	存在唯一
$\Leftrightarrow$	当且仅当
$\Rightarrow$	蕴含
$\vert$	证毕、述毕